Miscellanea

V. CXXVI

est a Tropico æ-
stiuo, quàm ip
sa κ λ. Quare
maiori tempo-
re circumferē-
tia π ρ permu-
tat Manifestū
Hemisphæriū,
quàm ipsa κ λ si
militer Mani-
festum: Verùm
quo tēpore cir
cumferentia κ λ
permutat Ma-

nifestum Hemisphærium, & ipsa κ λ permutat Occultum. Maiori igitur tempore circumferentia π ρ permutat Manifestum Hemisphærium, quàm κ λ Occultum. Simili modo ostendetur, quod & alia vtcumque sumpta maiori etiam tempore permutat Manifestum Hemisphærium, quàm alia vtcumque sumpta Occultum: Et hoc eodem modo in altero semicirculo contento sub Aequinoctiali versus Hybernum Tropicum potest demonstrari, quòd in illo ex circumferētijs æqualibus sumptis alia maiori quoque tempore permutat Occultum Hemisphærium, quàm reliqua Manifestum: & similiter alia vtcumque sumpta alia vtcumque sumpta:

Euclidis Phænomenon Finis.

σὺν Θεῷ δόξα:

FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS

LIBER DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.

BONONIAE,

Ex Officina Alexandri Benacii.

MDLXV.

ALEXANDRO FARNESIO CARDINALI AMPLISSIMO, ET OPTIMO.

CVM multæ res in mathematicis diſciplinis nequaquam ſatis adhuc explicatæ ſint, tum perdifficilis, & perobſcura quæſtio eſt de centro grauitatis corporum ſolidorum; quæ, & ad cognoſcendum pulcherrima eſt, & ad multa, quæ à mathematicis proponuntur, præclare intelligenda maximum affert adiumentum. de qua neminem ex mathematicis, neque noſtra, neque patrum noſtrorum memoria ſcriptum reliquiſſe ſcimus. & quamuis in earum monumentis literarum nō nulla reperiantur, ex quibus in hanc ſententiam adduci poſſumus, vt exiſtimemus hanc rem ab ijſdē vberrime tractatam eſſe; tamen neſcio quo fato adhuc in eiuſmodi librorum ignoratione verſamur. Archimedes quidem mathematicorū princeps in libello, cuius inſcriptio eſt, κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων, de centro planorum copioſiſsime, atque acutiſsime conſcripſit: & in eo explicando ſummā ingenii, & ſcientiæ gloriā eſt cōſecutus. Sed de cognitione cētri grauitatis corporū ſolidorū nulla in eius libris litera inuenitur. non multos abhinc annos MARCELLVS II. PONT. MAX.

cum adhuc Cardinalis esset, mihi, quæ sua erat humanitas, libros eiusdem Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua, latine redditos dono dedit. hos cum ego, ut aliorum studia incitarem, emendãdos, & cõmentariis illustrandos suscepissem, animaduerti dubitari non posse, quin Archimedes vel de hac materia scripsisset, vel aliorum mathematicorum scripta perlegisset. nam in iis tum alia nonnulla, tum maxime illam propositionem, ut euidentem, & aliàs probatam assumit, Centrũ grauitatis in portionibus conoidis rectanguli axem ita diuidere, vt pars, quæ ad verticem terminatur, alterius partis, quæ ad basim dupla sit. Verum hæc ad eam partem mathematicarum disciplinarum præcipue refertur, in qua de centro grauitatis corporum solidorum tractatur. non est autem consentaneum Archimedem illum admirabilem virum hanc propositionem sibi argumentis confirmandam existimaturum non fuisse, nisi eam vel aliis in locis probauisset, vel ab aliis probatam esse comperisset. quamobrem nequid in iis libris intelligendis desiderari posset, statui hanc etiam partem vel à veteribus prætermissam, vel tractatam quidem, sed in tenebris iacentem, non intactam relinquere; atque ex asidua mathematicorum, præsertim Archimedis lectione, quæ mihi in mentem venerunt, ea in medium afferre; ut centri grauitatis corporum solidorum, si non perfectam, at certe aliquam notitiam haberemus. Quem meum laborẽm nõ mathematicis ſolum, verum iis etiam, qui naturæ obſcuritate delectantur, nõ iniucundam fore ſperaui: multa enim προβλήματα cognitione digniſsima, quæ ad vtrãque ſcientiam attinent, ſeſe legentibus obtuliſſent. neque id vlli mirandum videri debet. vt enim in corporibus noſtris omnia membra, ex quibus certa quædam officia naſcuntur, diuino quodam ordine inter ſe implicata, & colligata ſunt: in iisq; admirabilis illa conſpiratio, quam σύμπνοιαν græci vocant, eluceſcit, ita tres illæ Philoſophiæ (ut Ariſtotelis verbo vtar) quæ veritatem ſolam propoſitam habent, licet quibuſdam quaſi finibus ſuis regantur: tamen earũ vnaquæque per ſe ipſam quodammodo imperfecta eſt: neque altera ſine alterius auxilio plene comprehendi poteſt. complures præterea mathematicorum nodi ante hac explicatu difficillimi nullo negotio expediti eſſent: atque (ut vno verbo complectar) niſi mea valde amo, tractationem hanc meam ſtudioſis non mediocrem vtilitatem, & magnam voluptatem allaturam eſſe mihi perſuaſi. cum autem ad hoc ſcribendum aggreſſus eſsem, allatus eſt ad me liber Franciſci Maurolici Meſſanenſis, in quo vir ille doctiſsimus, & in iis diſciplinis exercitatiſsimus affirmabat ſe de centro grauitatis corporum ſolidorum conſcripſiſſe. cum hoc intellexiſſem, ſuſtinui me pauliſper: tacitusque expectaui, dum opus clarisſimi uiri, quem ſemper honoris cauſſa nomino, in lucem proferretur: mihi enim exploratisſimum erat: Franciſcum Maurolicum multo doctius, & exquiſitius hoc diſciplinarum genus ſcriptis ſuis traditurum. ſed cum id tardius fieret, hoc eſt, ut ego interpretor, diligentius, mihi diutius hac ſcriptione non ſuperſedendum eſſe duxi, præſertim cum iam libri Archimedis de iis, quæ uehuntur in aqua, opera mea illuſtrati typis excudēdi eſſent. nec me alia cauſſa impuliſſet, ut de centro grauitatis corporum ſolidorum ſcriberem, niſi ut hac etiam ratione lux eis quàm maxime fieri poſſet afferretur. atq; id eò mihi faciendum exiſtimaui, quòd in ſpem ueniebam fore, ut cum ego ex omnibus mathematicis primus, hanc materiam explicandam ſuſcepiſſem; ſi quid errati forte à me commiſſum eſſet, boni uiri potius id meæ de ſtudioſis hominibus bene merēdi cupiditati, quàm arrogantiæ aſcriberent. reſtabat ut conſiderarem, cui potisſimum ex principibus uiris contemplationem hanc, nunc primum memoriæ, ac literis proditam dedicarem. harum mearum cogitationum ſumma facta, exiſtimaui nemini conuenientius de centro grauitatis corporum opus dicari oportere, quàm ALEXANDRO FARNESIO grauisſimo, ac prudentisſimo Cardinali, quo in uiro ſumma fortuna ſemper cū ſumma uirtute certauit. quid enim maxime in te admirari debeant homines, obſcurum eſt; uſum'ne re-

rum, qui pueritiæ tempus extremum principium ha
buiſti, & imperiorũ, & ad Reges, & Imperatores ho-
norificentiſsimarum legationum; an excellentiam
in omni genere literarum, qui vix adoleſcẽtulus, quæ
homines iam confirmata ætate ſummo ſtudio, diu-
turniſq; laboribus didicerunt, ſcientia, & cognitione
comprehendiſti: an conſilium, & ſapientiam in re-
gendis, & gubernãdis Ciuitatibus, cuius grauiſsimæ
ſententiæ in ſanctiſsimo Reip. Chriſtianæ conſilio di-
ctæ, potius diuina oracula, quàm ſententiæ habitæ
ſunt, & habentur. prætermitto liberalitatem, & mu-
nificentiam tuam, quam in ſtudioſiſsimo quoque ho
neſtando quotidie magis oſtendis, ne videar auribus
tuis potius, quàm veritati ſeruire. quamuis à te in tot
præclaros viros tanta beneficia collata ſunt, & confe-
rũtur, vt omnibus teſtatum ſit, nihil tibi eſſe charius,
nihil iucundius, quàm eximia tua liberalitate homi-
nes ad amplexandam virtutem, licet currentes incita-
re. nihil dico de ceteris virtutibus tuis, quæ tantæ
ſunt, quantæ ne cogitatione quidem comprehendi
poſſunt. Quamobrem hac præcipue de cauſſa te hu-
ius meæ lucubrationis patronum eſſe volui, quam ea,
qua ſoles, humanitate accipies. te enim ſemper ob
diuinas virtutes tuas colui, & obſeruaui: nihilq; mi-
hi fuit optatius; quàm tibi perſpectum eſſe meum
erga te animum; ſingularemq; obſeruantiam. cœ-
lum igitur digito attingam, ſi poſt grauiſsimas oc-

cupationes tuas legendo Federici tui libro aliquid impertiri temporis non grauaberis: cumq; in iis, qui tibi semper addicti erunt, numerare. Vale.

Federicus Commandinus.

FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS LIBER DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

DIFFINITIONES.

CENTRVM grauitatis, Pappus Alexandrinus in octauo mathematicarum collectionum libro ita diffiniuit. 1

λέγομεν δὲ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντὸς, ἀφ' οὗ κατ' ἐποίνιαν ἀρτηθὲν τὸ βάρος ἠμερεῖ φερόμενον, καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν, οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ. hoc est,

Dicimus autem centrum grauitatis uniuscuiusque corporis punctum quoddam intra positum, à quo si graue appensum mente concipiatur, dum fertur quiescit; & seruat eam, quam in principio habebat positionem: neque in ipsa latione circumuertitur.

Possumus etiam hoc modo diffinire.

Centrum grauitatis uniuscuiusque solidæ figuræ est punctum illud intra positum, circa quod undique partes æqualium momentorum consistunt. si enim per tale centrum ducatur planum figuram quomodocunque secans semper in partes æqueponderantes ipſam diuidet.

2 Priſmatis, cylindri, & portionis cylindri axem appello rectam lineam, quæ oppoſitorum planorum centra grauitatis coniungit.

3 Pyramidis, coni, & portionis coni axem dico lineam, quæ à uertice ad centrum grauitatis baſis perducitur.

4 Si pyramis, conus, portio coni, uel conoidis ſecetur plano baſi æquidiſtante, pars, quæ eſt ad baſim, fruſtum pyramidis, coni, portionis coni, uel conoidis dicetur; quorum plana æquidiſtantia, quæ opponuntur ſimilia ſunt, & inæqualia: axes uero ſunt axium figurarum partes, quæ in ipſis comprehenduntur.

PETITIONES.

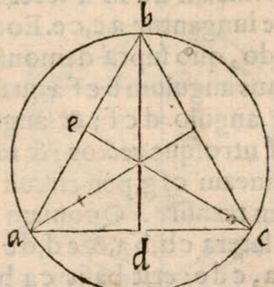
1 Solidarum figurarum ſimilium centra grauitatis ſimiliter ſunt poſita.

2 Solidis figuris ſimilibus, & æqualibus inter ſe aptatis, centra quoque grauitatis ipſarum inter ſe aptata erunt.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Omnis figuræ rectilineæ in circulo deſcriptæ, quæ æqualibus lateribus, & angulis continetur, centrum grauitatis est idem, quod circuli centrum.

Sit primo triangulum æquilaterum a b c in circulo descriptum: & diuisa a c bifariam in d, ducatur b d. erit in linea b d centrum grauitatis triãguli a b c, ex tertia decima primi libri Archimedis de centro grauitatis planorum. Et quoniam linea a b est æqualis lineæ b c; & a d ipsi d c; estq; b d utrique communis: triangulum a b d æquale erit triangulo c b d: & anguli angulis æquales, qui æqualibus lateribus subtenduntur. ergo anguli ad d utriq; recti sunt. quòd cum linea b d secet a c bifariam, & ad angulos rectos; in ipsa b d est centrum circuli. quare in eadem b d linea erit centrum grauitatis trianguli, & circuli centrum. Similiter diuisa a b bifariam in e, & ducta c e, ostendetur in ipsa utrũque centrum contineri. ergo ea erunt in puncto, in quo lineæ b d, c e conueniunt. trianguli igitur a b c centrum grauitatis est idem, quod circuli centrum.

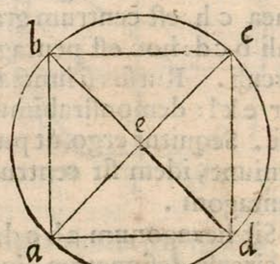


8. primi.

13. primi.

corol. primæ tertii

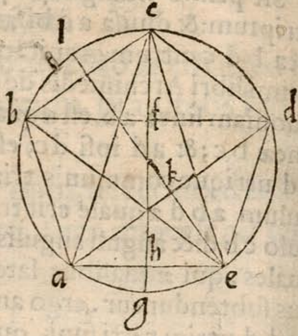
Sit quadratum a b c d in circulo descriptum: & ducantur a c, b d, quæ conueniant in e. ergo punctum e est centrum grauitatis quadrati, ex decima eiusdem libri Archimedis. Sed cum omnes anguli ad a b c d recti sint; erit a b c semicirculus: itemq; b c d: & propterea lineæ a c, b d diametri circuli:



31. tertii.

quæ quidem in centro conueniunt. idem igitur est centrum grauitatis quadrati, & circuli centrum.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum in circulo descriptum a b c d e: & iuncta b d, bifariamq; in f diuisa, ducatur c f, & producatur ad circuli circumferentiam in g; quæ lineam a e in h secet: deinde iungantur a c, c e. Eodem modo, quo supra demonstrabimus angulum b c f æqualem esse angulo d c f; & angulos ad f utrosque rectos: & idcirco lineam c f g per circuli centrum transire. Quoniam igitur latera c b, b a, & c d, d e æqualia sunt; & æquales anguli



4. Primi. c b a, c d e: erit basis c a basi c e, & angulus b c a angulo d c e æqualis. ergo & reliquus a c h, reliquo e c h. est autem c h utrique triangulo a c h, e c h communis. quare basis a h æqualis est basi h e: & anguli, qui ad h recti: suntq;

28. primi. recti, qui ad f. ergo lineæ a e, b d inter sese æquidistant. Itaque cum trapezij a b d e latera b d, a e æquidistantia à linea f h bifariam diuidantur; centrum grauitatis ipsius erit

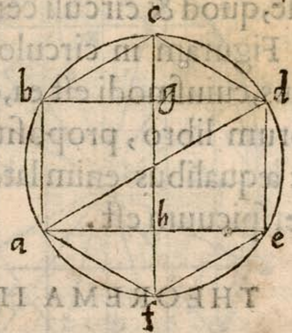
13. Archimedis. in linea f h, ex ultima eiusdem libri Archimedis. Sed trianguli b c d centrum grauitatis est in linea c f. ergo in eadem linea c h est centrum grauitatis trapezij a b d e, & trianguli b c d: hoc est pentagoni ipsius centrum: & centrum circuli. Rursus si iuncta a d, bifariamq; secta in k, ducatur e k l: demonstrabimus in ipsa utrumque centrum inesse. Sequitur ergo, ut punctum, in quo lineæ c g, e l conueniunt, idem sit centrum circuli, & centrum grauitatis pentagoni.

Sit hexagonum a b c d e f æquilaterum, & æquiangulum in circulo designatum: iunganturq; b d, a e: & bifariam se-

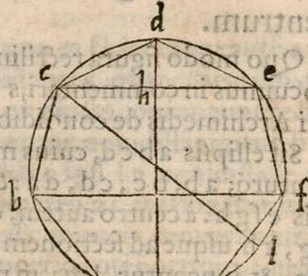
cta

cta b d in g puncto, ducatur c g; & protrahatur ad circuli usque circumferentiam; quæ secet a e in h. Similiter conclu demus c g per centrum circuli transire: & bifariam secare lineam a e; itemq; lineas b d, a e inter se æquidistantes esse. Cum igitur c g per centrum circuli transeat; & ad punctũ f perueniat necesse est: quòd c d e f sit dimidium circumfe rentiæ circuli. Quare in eadem diametro c f erunt centra gra uitatis triangulorum b c d, a f e, & quadrilateri a b d e, ex quibus constat hexagonum a b c d e f. perspicuum est igitur in ipsa c f esse circuli centrum, & centrum grauitatis hexagoni. Rursus ducta altera diametro a d, eisdem rationibus ostendemus in ipsa utrumque cẽtrum inesse. Centrum ergo grauitatis hexagoni, & centrum circuli idem erit.

13. Archimedis. 9. eiusdẽ.



Sit heptagonum a b c d e f g æquilaterum atque æquiangulum in circulo descriptum: & iungantur c e, b f, a g: diuisa autem c e bifariam in pũcto h: & iuncta d h producatur in k. non aliter demonstrabimus in linea d k esse centrum circuli, & centrum grauitatis trianguli c d e, & trapeziorum b c e f, a b f g, hoc est centrum totius heptagoni: & rursus eadem centra in alia diametro c l similiter ducta contineri. Quare & centrum grauitatis heptagoni, & centrum circuli in idem punctum conueniunt. Eodem mo



do in reliquis figuris æquilateris, & æquiangulis, quæ in circulo describuntur, probabimus cẽtrum grauitatis earum, & centrum circuli idem esse. quod quidem demonstrare oportebat.

Ex quibus apparet cuiuslibet figuræ rectilineæ in circulo plane descriptæ centrum grauitatis idẽ esse, quod & circuli centrum.

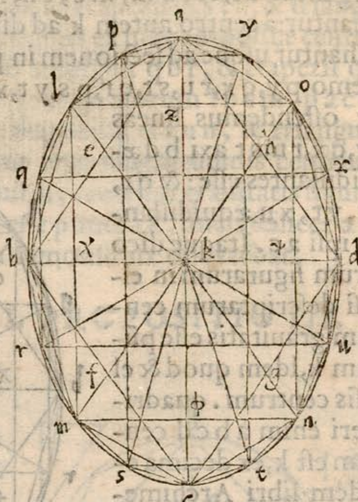
γνώριμος Figuram in circulo plane descriptam appellamus, cuiusmodi est ea, quæ in duodecimo elementorum libro, propositione secunda describitur. ex æqualibus enim lateribus, & angulis constare perspicuum est.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Omnis figuræ rectilineæ in ellipsi plane descriptæ centrum grauitatis est idem, quod ellipsis centrum.

Quo modo figura rectilinea in ellipsi plane describatur, docuimus in commentarijs in quintam propositionem libri Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus.

Sit ellipsis a b c d, cuius maior axis a c, minor b d: iunganturq; a b, b c, c d, d a: & bifariam diuidantur in punctis e f g h. à centro autem, quod sit k ductæ lineæ k e, k f, k g, k h usque ad sectionem in puncta l m n o protrahantur: & iungantur l m, m n, n o, o l, ita ut a c secet lineas l o, m n, in z φ punctis, & b d secet l m, o n in χ ψ. erunt l k, k n linea una, itemque linea una ipsæ m k, k o: & lineæ b a, c d æquidistabunt lineæ m o: & b c, a d ipsi l n. rursus l o, m n axi b d æquidistabunt: & l m, o n ipsi a c. Quoniam enim triangulorum a b k, a d k, latus b k est æquale lateri k d; & a k utrique commune; anguliq; ad k recti: basis a b basi a d; & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. eadem quoque ratione ostendetur b c æqualis c d; & a b ipsi b c. quare omnes a b, b c, c d, d a sunt æquales. & quoniam anguli ad a æquales sunt angulis ad c; erunt anguli b a c, a c d coalterni inter se æquales; itemq; d a c, a c b. ergo c d ipsi b a; & a d ipsi b c æquidistat. At uero cum lineæ a b, c d inter se æquidistantes bifariam secentur in punctis e g; erit linea l e k g n diameter sectionis, & linea una, ex demonstratis in uigesima octaua secundi conicorum. Et eadem ratione linea una m f k h o. Sunt autē a d, b c inter se se æquales, & æquidistantes. quare & earum dimidiæ a h, b f; itemq; h d, f e; & quæ ipsas coniungunt rectæ lineæ æquales, & æquidistantes erunt. æquidistāt igitur b a, c d diametro m o: & pariter a d, b c ipsi l n æquidistare ostendemus. Si igitur manēte diametro a c intelligatur a b c portio ellipsis ad portionem a d c moueri, cum primum b applicuerit ad d, cōgruet tota portio toti portioni, lineaq; b a lineæ a d; & b c ipsi c d congruet: punctum uero e cadet in h; f in g: & linea k e in lineam k h: & k f in k g. quare & e l in h o, et f m in g n. At ipsa l z in z o; et m φ in φ n cadet. congruet igitur triangulum l k z triangulo o k z: et

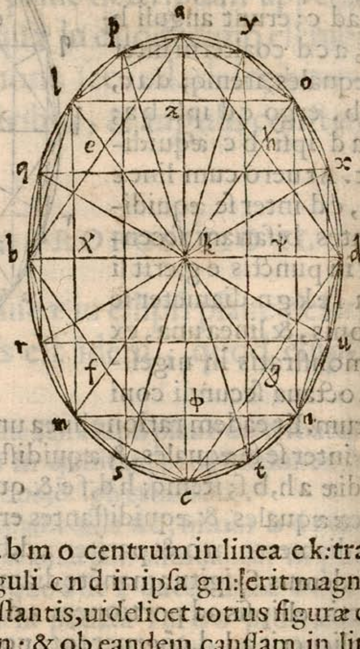


8. primi

33. primi

triangulum m k φ triangulo n k φ. ergo anguli l z k, o z k, m φ k, n φ k æquales sunt, ac recti. quòd cum etiam recti

48. primi. sint, qui ad k; æquidistabunt lineæ l o, m n axi b d. & ita demonstrabuntur l m, o n ipsi a c æquidistare. Rursus si iungantur a l, l b, b m, m c, c n, n d, d o, o a: & bifariam diuidantur: à centro autem k ad diuisiones ductæ lineæ protrahantur usque ad sectionem in puncta p q r s t u x y: & postremo p y, q x, r u, s t, q r, p s, y t, x u coniungantur. Similiter ostendemus lineas p y, q x, r u, s t axi b d æquidistantes esse: & q r, p s, y t, x u æquidistantes ipsi a c. Itaque dico harum figurarum in ellipsi descriptarum centrum grauitatis esse pūctum k, idem quod & ellipsis centrum. quadrilateri enim a b c d centrum est k, ex decima eiusdem libri Archimedis, quippe cū in eo omnes diametri cōueniāt. Sed in figura a l b m c n



13. Archimedis. d o, quoniam trianguli a l b centrum grauitatis

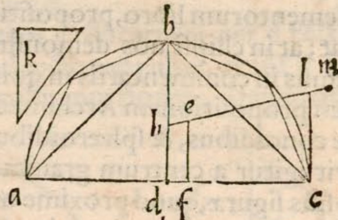
Vltima. est in linea l e: trapezijq; a b m o centrum in linea e k: trapezij o m c d in k g: & trianguli c n d in ipsa g n: erit magnitudinis ex his omnibus constantis, uidelicet totius figuræ centrum grauitatis in linea l n: & ob eandem caussam in linea o m. est enim trianguli a o d centrum in linea o h: trapezij a l n d in h k: trapezij l b c n in k f: & trianguli b m c in f m. cum ergo figuræ a l b m c n d o centrum grauitatis sit in linea l n, & in linea o m; erit centrum ipsius punctum k, in

quo

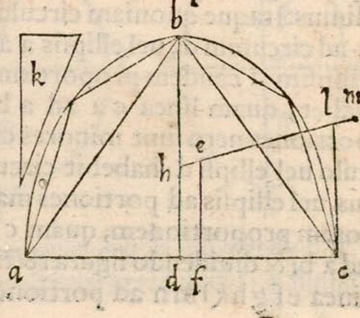
quo scilicet l n, o m conueniunt. Postremo in figura a p l q b r m s c t n u d x o y centrum grauitatis trianguli p a y, & trapezii p l o y est in linea a z: trapeziorum uero l q x o, q b d x centrum est in linea z k: & trapeziorũ b r u d, r m n u in k φ: & denique trapezii m s t n; & trianguli s c t in φ c. quare magnitudinis ex his compositæ centrũ in linea a c consistit. Rursus trianguli q b r, & trapezii q l m r centrum est in linea b χ: trapeziorum l p s m, p a c s, a y t c, y o n t in linea χ φ: trapeziiq; o x u n, & trianguli x d u centrum in ψ d. totius ergo magnitudinis centrum est in linea b d. ex quo sequitur, centrum grauitatis figuræ a p l q b r m s c t n u d x o y esse punctũ K, lineis scilicet a c, b d commune, quæ omnia demonstrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Cuiuslibet portionis circuli, & ellipsis, quæ dimidia non sit maior, centrum grauitatis in portionis diametro consistit.



HOC eodem prorsus modo demonstrabitur, quo in libro de centro grauitatis planorum ab Archimede demonstratũ est, in portione cõtenta recta linea, & rectanguli coni sectione grauitatis cẽtrum esse in diametro portionis. Et ita demonstrari po



test in portione, quæ recta linea & obtusianguli coni sectione, seu hyperbola continetur.

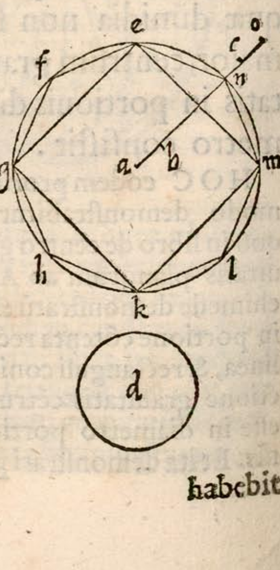
THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In circulo & ellipsi idem est figuræ & grauitatis centrum.

SIT circulus, uel ellipsis, cuius centrum a. Dico a grauitatis quoque centrum esse. Si enim fieri potest, sit b centrum grauitatis: & iuncta a b extra figuram in c producatur: quam uero proportionem habet linea c a ad a b, habeat circulus a ad alium circulum, in quo d; uel ellipsis ad aliam ellipsim: & in circulo, uel ellipsi figura rectilinea plane describatur adeo, ut tandem relinquantur portiones quædam minores circulo, uel ellipsi d; quæ figura sit e f g h k l m n. Illud uero in circulo fieri posse ex duodecimo elementorum libro, propositione secunda manifeste constat; at in ellipsi nos demonstrauimus in commentariis in quintam propositionem Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus. erit igitur a centrum grauitatis ipsius figuræ, quod proxime ostẽdimus. Itaque quoniam circulus a ad circulum d; uel ellipsis a ad ellipsim d eandem proportionẽ habet, quam linea c a ad a b: portiones uero sunt minores cir-

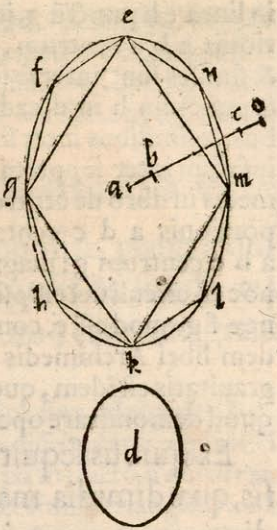
1. quinti. culo uel ellipsi d: habebit circulus, uel ellipsis ad portiones maiorem proportionem, quàm c a

19. quinti apud Cã panum. ad a b: & diuidendo figura rectilinea e f g h k l m n ad portiones



habebit

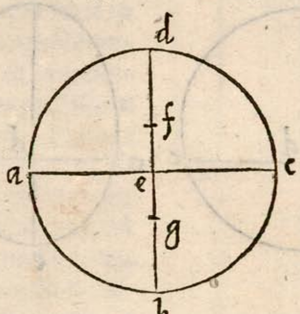
habebit maiorem proportionē, quam c b ad b a. fiat o b ad b a, ut figura rectilinea ad portiones. cum igitur à circulo, uel ellipsi, cuius grauitatis centrum est b, auferatur figura rectilinea e f g h k l m n, cuius centrum a; reliquæ magnitudinis ex portionibus compositæ centrum grauitatis erit in linea a b producta, & in puncto o, extra figuram posito. quod quidem fieri nullo modo posse perspicuum est. sequitur ergo, ut circuli & ellipsis centrum grauitatis sit punctum a, idem quod figuræ centrum.

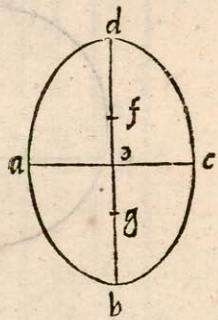


8. Archimedis.

ALITER.

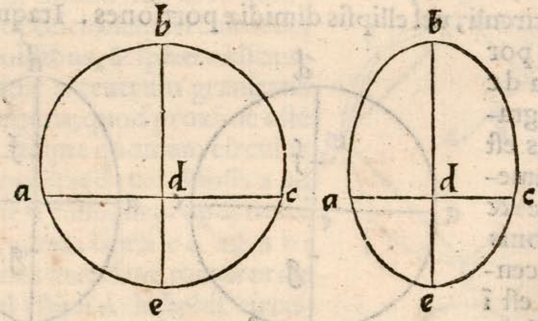
Sit circulus, uel ellipsis a b c d, cuius diameter d b, & centrum e: ducaturq; per e recta linea a c, secans ipsam d b ad rectos angulos. erunt a d c, a b c circuli, uel ellipsis dimidiæ portiones. Itaque quoniam portiōis a d c cētrū grauitatis est in diametro d e: & portionis a b c centrum est ī ipsa e b: totius circuli, uel ellipsis grauitatis centrum erit in diametro d b. Sit autem portionis a d c cētrum grauitatis f: & sumatur





in linea e b punctū g, ita ut ſit g e æqualis e f. erit g portionis a b c centrum. nam ſi hæ portiones, quæ æquales & ſimiles ſunt, inter ſe ſe aptentur, ita ut b e cadat in d e, & punctum b in d cadet, & g in f: figuris autem æqualibus, & ſimilibus inter ſe aptatis, centra quoque grauitatis ipſarum inter ſe aptata erunt, ex quinta petitione Archimedis in libro de centro grauitatis planorum. Quare cum portionis a d c centrum grauitatis ſit f: & portionis a b c centrum g: magnitudinis; quæ ex utriſque efficitur: hoc eſt circuli uel ellipſis grauitatis centrum in medio lineæ f g, quod eſt e, conſiſtet, ex quarta propoſitione eiuſdem libri Archimedis. ergo circuli, uel ellipſis centrum grauitatis eſt idem, quod figuræ centrum. atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

Ex quibus ſequitur portionis circuli, uel ellipſis, quæ dimidia maior ſit, centrum grauitatis in diametro quoque ipſius conſiſtere.



Sit enim maior portio a b c, cuius diameter b d, & compleatur circulus, uel ellipſis, ut portio reliqua ſit a e c, dia metrum

metrum habens e d. Quoniam igitur circuli uel ellipsis a e c b grauitatis centrum est in diametro b e, & portionis a e c centrum in linea e d: reliquæ portionis, uidelicet a b c centrum grauitatis in ipsa b d consistat necesse est, ex octaua propositione eiusdem.

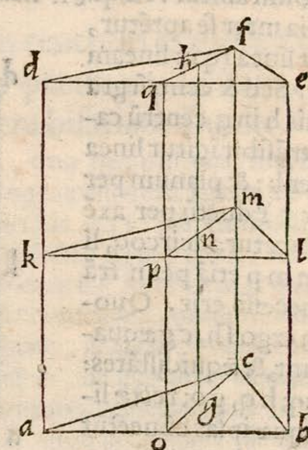
THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI prisma secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio erit figura æqualis & similis ei, quæ est oppositorum planorum, centrum grauitatis in axe habens.

Sit prisma, in quo plana opposita sint triangula a b c, d e f; axis g h: & secetur plano iam dictis planis æquidistãte; quod faciat sectionem k l m; & axi in pũcto n occurrat. Dico k l m triangulum æquale esse, & simile triangulis a b c d e f; atque eius grauitatis centrum esse punctum n. Quoniam enim plana a b c K l m æquidistantia secãtur a plano a e; rectæ lineæ a b, K l, quæ sunt ipsorum cõmunes sectiones inter se se æquidistant. Sed æquidistant a d, b e; cum a e sit parallelogrammum, ex prismatis diffinitione. ergo & a l parallelogrammũ erit; & propterea linea k l, ipsi a b æqualis. Similiter demonstrabitur l m æquidistans, & æqualis b c; & m k ipsi c a.

16. undecimi.

34. primi



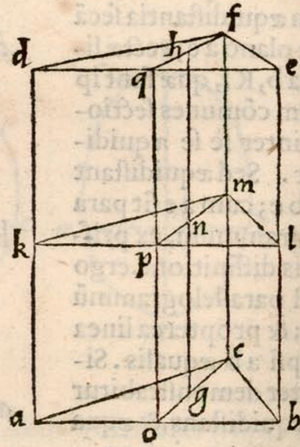
Itaque quoniam duæ lineæ K l, l m ſe ſe tangentes, duab us lineis ſe ſe tangentibus a b, b c æquidiſtant; nec ſunt in eodem plano: angulus K l m æqualis eſt angulo a b c: & ita angulus l m K, angulo b c a, & m K l ipſi c a b æqualis probabitur. triangulum ergo K l m æquale, & ſimile triangulo a b c. quare & triangulo d e f. Ducatur linea c g o, & per ipſam, & per c f ducatur planum ſecans priſma; cuius & parallelogrammi a e communis ſectio ſit o p q. tranſibit linea f q per h, & m p per n. nam cum plana æquidiſtantia ſecentur à plano c q, communes eorum ſectiones c g o, m p, f q ſibi ipſis æquidiſtabunt. Sed & æquidiſtant a b, K l, d e. anguli ergo a o c, K p m, d q f inter ſe æquales ſunt: & ſunt æquales qui ad puncta a K d conſtituuntur. quare & reliqui reliquis æquales; & triangula a c o, K m p, d f q inter ſe ſimilia erunt. Vt igitur c a ad a o, ita f d ad d q: & permutando ut c a ad f d, ita a o ad d q. eſt autem c a æqualis f d. ergo & a o ipſi d q. eadem quoque ratione & a o ipſi K p æqualis demonſtrabitur. Itaque ſi triangula, a b c, d e f æqualia & ſimilia inter ſe aptētur, cadet linea f q in lineam c g o. Sed & centrū grauitatis h in g centrū cadet. trāſibit igitur linea f q per h: & planum per c o & c f ductū per axē g h ducetur: idcircoq; lineam m p etiā per n trāſire neceſſe erit. Quoniam ergo f h, c g æquales ſunt, & æquidiſtātes: itemq; h q, g o; rectæ lineæ, quæ ipſas cōnectūt c m f, g n h, o p q æquales & æquidiſtātes erūt.

10. undecimi

10. undecimi

4. ſexti

per 5. petitionem Archimedis.



æqui-

æquidiſtant autem c g o, m n p. ergo parallelogrāma ſunt o n, g m, & linea m n æqualis c g; & n p ipſi g o. aptatis igitur k l m, a b c triãgulis, quæ æqualia & ſimilia sũt; linea m p in c o, & punctum n in g cadet. Quòd cũ g ſit centrum grauitatis trianguli a b c, & n trianguli k l m grauitatis centrum erit id, quod demonſtrandum relinquebatur. Simili ratione idem contingere demonſtrabimus in aliis priſmatibus, ſiue quadrilatera, ſiue plurilatera habeant plana, quæ opponuntur.

COROLLARIVM.

Ex iam demonſtratis perſpicue apparet, cuiuslibet priſmatis axem, parallelogrammorum lateribus, quæ ab oppoſitis planis ducũtur æquidiſtare.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Cuiuslibet priſmatis centrum grauitatis eſt in plano, quod oppoſitis planis æquidiſtans, reliquorum planorum latera bifariam diuidit.

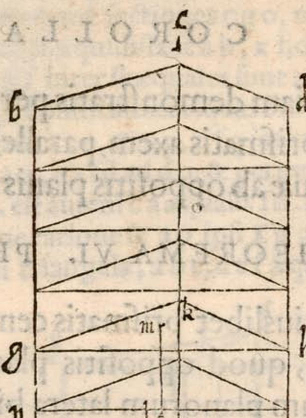
Sit priſma, in quo plana, quæ opponuntur ſint triangula a c e, b d f: & parallelogrammorum latera a b, c d, e f bifariam diuidãtur in punctis g h k: per diuiſiones autem planum ducatur; cuius ſectio figura g h k. erit linea g h æquidiſtans lineis a c, b d & h k ipſis c e, d f. quare ex decimaquinta undecimi elementorum, planum illud planis a c e, b d f æquidiſtabit, & faciet ſectionem figuram ipſis æqualem, & ſimilem, ut proxime demonſtrauimus. Dico centrum grauitatis priſmatis eſſe in plano g h k. Si enim fieri poteſt, ſit eius centrum l: & ducatur l m uſque ad planum g h k, quæ ipſi a b æquidiſtet.

33. primi

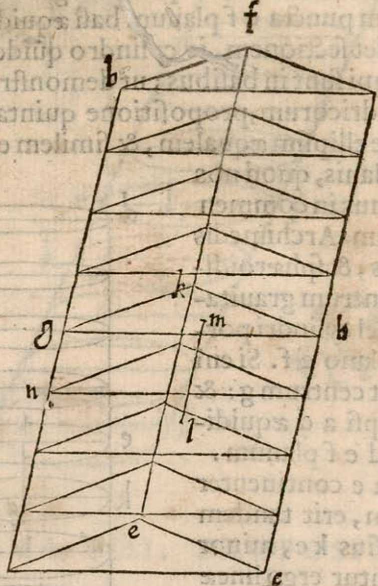
5. huius

1. decimi ergo linea a g continenter in duas partes æquales diuisa, relinquetur tãdem pars aliqua n g, quæ minor erit l m. Vtraque uero linearum a g, g b diuidatur in partes æquales ipsi n g: & per puncta diuisionum plana oppositis planis æquidistantia ducantur. erunt sectiones figuræ æquales, ac similes ipsis a c e, b d f: & totum prisma diuisum erit in prismata æqualia, & similia: quæ cum inter se congruãt; & grauitatis centra sibi ipsis congruentia, respondentiaq; habebunt. Itaq: sunt magnitudines quędã æquales ipsi n h, & numero pares, quarum centra grauitatis in eadẽ recta linea constituuntur: duæ uero mediæ æquales sunt: & quæ ex utraque parte ipsarum similiter æquales: & æquales rectæ lineæ, quæ inter grauitatis centra interiiciuntur. quare ex corollario quintæ propositionis primi libri Archimedis de centro grauitatis planorum; magnitudinis ex his omnibus compositæ centrum grauitatis est in medio lineæ, quæ magnitudinum mediarum centra coniungit. at qui non ita res habet,

5 huius



bet, si quidem l extra medias magnitudines positum est. Constat igitur centrum grauitatis prismatis esse in plano

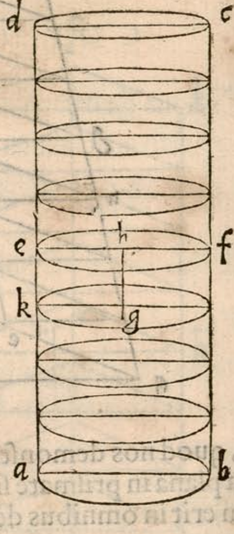


g h k, quod nos demonstrandum proposuimus. At si opposita plana in prismate sint quadrilatera, uel plurilatera, eadem erit in omnibus demonstratio.

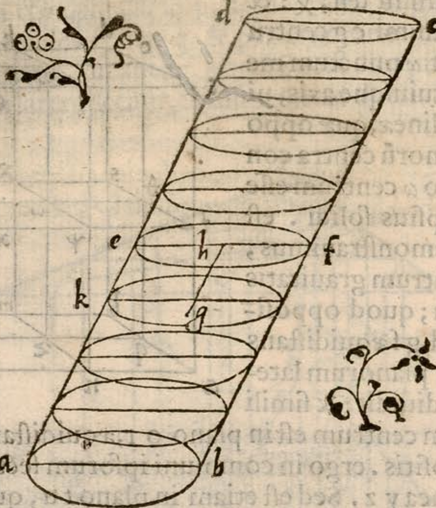
THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Cuiuslibet cylindri, & cuiuslibet cylindri portionis centrum grauitatis est in plano, quod basibus æquidistans, parallelogrammi per axem latera bifariam secat.

SIT cylindrus, uel cylindri portio a c: & plano per axem ducto secetur; cuius sectio sit parallelogrammum a b c d: & bifariam diuisis a d, b c parallelogrammi lateribus, per diuisionum puncta e f planum basi æquidistans ducatur; quod faciet sectionem in cylindro quidem circulum æqualem iis, qui sunt in basibus, ut demonstrauit Serenus in libro cylindricorum, propositione quinta: in cylindri uero portione ellipsim æqualem, & similem eis, quæ sunt in oppositis planis, quod nos demonstrauimus in commentariis in librum Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus. Dico centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis esse in plano e f. Si enim fieri potest, sit centrum g: & ducatur g h ipsi a d æquidistans, usque ad e f planum. Itaque linea a e continenter diuisa bifariam, erit tandem pars aliqua ipsius k e, minor g h. Diuidantur ergo lineæ a e, e d in partes æquales ipsi k e: & per diuisiones plana basibus æquidistantia ducantur. erunt iam sectiones, figuræ æquales, & similes eis, quæ sunt in basibus: atque erit cylindrus in cylindros diuisus: & cylindri portio in portiones æquales, & similes ipsi k f. reliqua similiter, ut superius in prismate concludentur.



THEO-

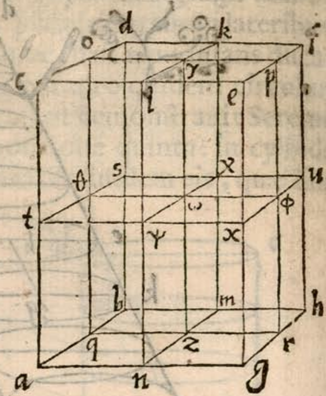


THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Cuiuslibet prismatis, & cuiuslibet cylindri, uel cylindri portionis grauitatis centrum in medio ipsius axis consistit.

Sit primum a f prisma æquidistantibus planis contentũ, quod solidum parallelepipedum appellatur: & oppositorum planorum c f, a h, d a, f g latera bifariam diuidantur in punctis k l m n o p q r s t u x: & per diuisiones ducantur plana k n, o r, s x. communes autem eorum planorum sectiones sint lineæ y z, $\theta\,\phi$, $\chi\,\psi$: quæ in puncto ω conueniãt. erit ex decima eiusdem libri Archimedis parallelogrammi c f centrum grauitatis punctum y; parallelogrammi a h centrum z: parallelogrammi a d, ε: parallelogrammi f g, φ: parallelogrammi d h, χ: & parallelogrammi c g centrũ ψ: atque erit ω punctum medium uniuscuiusque axis, uidelicet eius lineæ, quæ oppositorum planorũ centra coniungit. Dico ω centrum esse grauitatis ipsius solidi. est

6 huius enim, ut demonstrauimus, solidi a f centrum grauitatis in plano K n; quod oppositis planis a d, g f æquidistans reliquorum planorum latera bifariam diuidit: & simili

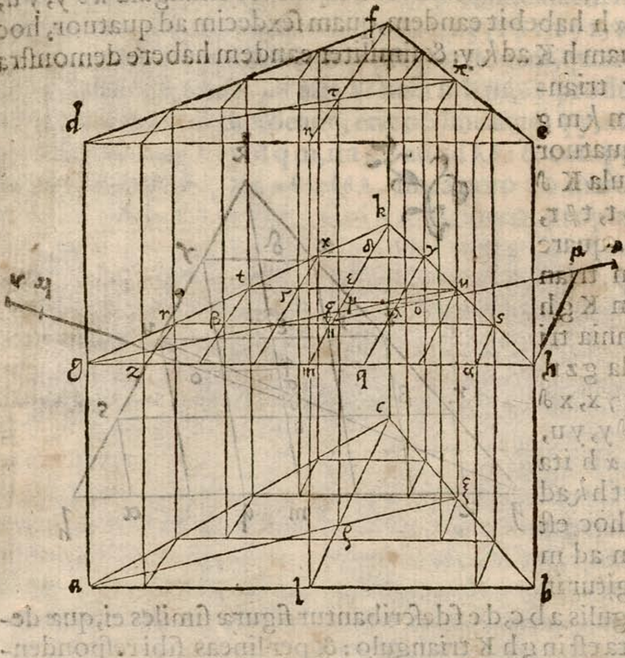


ratione idem centrum est in plano o r, æquidistante planis a e, b f oppositis. ergo in communi ipsorum sectione: uidelicet in linea y z. Sed est etiam in plano t u, quod quidẽ y z secat in ω. Constat igitur centrum grauitatis solidi esse punctum ω, medium scilicet axium, hoc est linearum, quæ planorum oppositorum centra coniungunt.

Sit aliud prima a f; & in eo plana, quæ opponuntur, triangula a b c, d e f: diuisisq; bifariam parallelogrammorum lateribus a d, b e, c f in punctis g h k, per diuisiones planũ ducatur, quod oppositis planis æquidistans faciet sectionẽ triangulum g h k æquale, & simile ipsis a b c, d e f. Rursus diuidatur a b bifariam in l: & iuncta c l per ipsam, & per c k f planum ducatur prisma secans, cuius, & parallelogrã mi a e communis sectio sit l m n. diuidet punctum m lineam g h bifariam; & ita n diuidet lineam d e: quoniam

5 huius triangula a c l, g k m, d f n æqualia sunt, & similia, ut supra demonstrauimus. Iam ex iis, quæ tradita sunt, constat centrum greuitatis prismatis in plano g h k contineri. Dico ipsum esse in linea k m. Si enim fieri potest, sit o centrum; & per

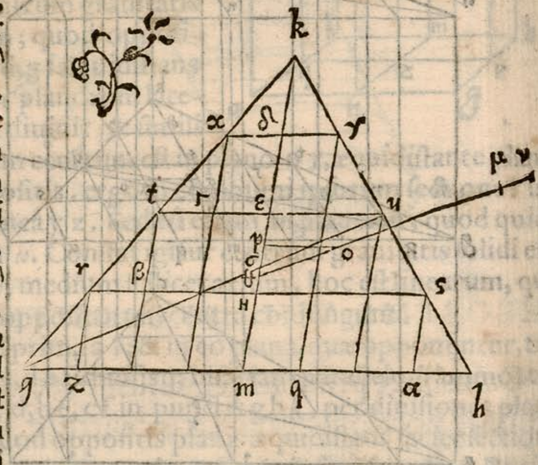
& per o ducatur o p ad k m ipsi h g æquidistans. Itaque linea h m bifariã usque eò diuidatur, quoad reliqua sit pars quædam q m, minor o p. deinde h m, m g diuidantur in partes æquales ipsi m q: & per diuisiones lineæ ipsi m K æquidistantes ducantur. puncta uero, in quibus hæ triangulorum latera secant, coniungantur ductis lineis r s, t u,



x y; quæ basi g h æquidistabunt. Quoniam enim lineæ g z, h α sunt æquales: itemq; æquales g m, m h: ut m g ad g z, ita erit m h, ad h α: & diuidendo, ut m z ad z g, ita m α ad α h. Sed ut m z ad z g, ita k r ad r g: & ut m α ad α h, ita k s ad s h. quare ut k r ad r g, ita κ s ad s h. æquidistant igitur inter sese r s, g h. eadem quoque ratione demonstrabimus

2. sexti.
11. quinti
2. sexti.

tu, x y ipsi g h æquidistare. Et quoniam triangula, quæ fiunt à lineis [illegible] æqualia sunt inter se, & similia
20. sexti triangulo K m h: habebit triangulum K m h ad triangulũ K δ y duplam proportionem eius, quæ est lineæ K h ad K y. sed K h posita est quadrupla ipsius k y. ergo triangulum k m h ad triangulum K δ y eãdem proportionem habebit, quam sexdecim ad unũ: & ad quatuor triangula k δ y, y u, u s, s α h habebit eandem, quam sexdecim ad quatuor, hoc est quam h K ad k y: & similiter eandem habere demonstrabitur triangulum k m g ad quatuor triãgula K δ x, x γ t, t β r,
12. uel 12. quinti. r z g. æquare totum triangulum K g h ad omnia triangula g z r, r β t, t γ x, x δ K, K δ y, y u, u s, s α h ita erit, ut h k ad k y, hoc est ut h m ad m q. Si igitur in



triangulis a b c, d e f describantur figuræ similes ei, quæ descripta est in g h K triangulo: & per lineas sibi respondentes plana ducantur: totum prisma a f diuisum erit in tria solida parallelepipeda y γ, u β, s z, quorum bases sunt æquales & similes ipsis parallelogrammis y γ, u β, s z: & in octo prismata g z r, r β t, t γ x, x δ K, k δ y, y u, u s, s α h: quorum item bases æquales, & similes sunt dictis triangulis; altitudo autem in omnibus, totius prismatis altitudini æqualis.

Itaque ſolidi parallelepipedi y γ centrum grauitatis eſt in linea δ α; ſolidi u β centrum eſt in linea ε η: & ſolidi s z in linea η m, quæ quidem lineæ axes ſunt, cum planorum oppoſitorum centra coniungant. ergo magnitudinis ex his ſolidis compoſitæ centrum grauitatis eſt in linea δ m, quod ſit θ; & iuncta θ o producatur: à puncto autem h ducatur h μ ipſi m k æquidiſtans, quæ cum θ o in μ conueniat. triangulum igitur g h k ad omnia triangula g z r, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h eandem habet proportionem, quam h m ad m q; hoc eſt, quam $\mu\theta$ ad $\theta\lambda$: nam ſi h m, $\mu\theta$ produci intelligantur, quouſque coeant; erit ob linearum q y, m k æquidiſtantiam, ut h q ad q m, ita $\mu\lambda$ ad $\lambda\theta$: & componendo, ut h m ad m q, ita $\mu\theta$ ad $\theta\lambda$. linea uero θ o maior eſt, quàm $\theta\lambda$: habebit igitur $\mu\theta$ ad $\theta\lambda$ maiorem proportionem, quàm ad θ o. quare triangulum etiam g h k ad omnia iam dicta triangula maiorem proportionē habebit, quàm $\mu\theta$ ad θ o. ſed ut triangulū g h k ad omnia triangula, ita totū priſma a f ad omnia priſmata g z r, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h: quoniam enim ſolida parallelepipeda æque alta, eandem inter ſe proportionem habent, quam baſes; ut ex trigeſimaſecunda undecimi elementorum conſtat. ſunt autem ſolida parallelepipeda priſmatum triangulares baſes habentium dupla: ſequitur, ut etiam huiuſmodi priſmata inter ſe ſint, ſicut eorum baſes. ergo totum priſma ad omnia priſmata maiorem proportionem habet, quam $\mu\theta$ ad θ o: & diuidendo ſolida parallelepipeda y γ, u β, s z ad omnia priſmata proportionem habent maiorem, quàm μ o ad o θ. fiat ν o ad o θ, ut ſolida parallelepipeda y γ, u β, s z ad omnia priſmata. Itaque cum à priſmate a f, cuius centrum grauitatis eſt o, auferatur magnitudo ex ſolidis parallelepipedis y γ, u β, s z conſtans: atque ipſius grauitatis centrum ſit θ: reliquæ magnitudinis, quæ ex omnibus priſmatibus conſtat, grauitatis centrum erit in linea θ o producta: & in puncto ν, ex octaua propoſitione eiuſdem libri Archi-

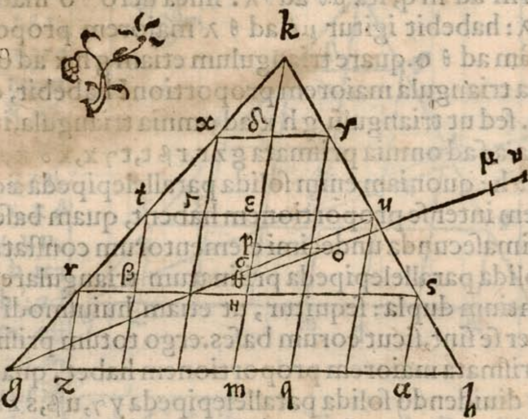
8. quinti.

28. undecimi

15. quinti

19. quinti apud Cãpanum.

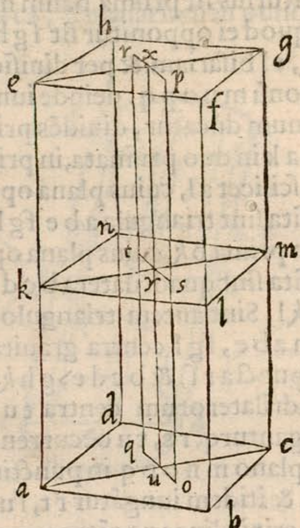
medis. ergo punctum ν extra prisma a f positum, centrũ erit magnitudinis cõpositæ ex omnibus prismatibus g z, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h, quod fieri nullo modo potest. est enim ex diffinitione centrum grauitatis solidæ figuræ intra ipsam positum, non extra. quare relinquitur, ut cẽtrum grauitatis prismatis sit in linea K m. Rursus b c bifariam in ξ diuidatur: & ducta a ξ, per ipsam, & per lineam a g d planum ducatur; quod prisma secet: faciatq; in parallelogrammo b f sectionem ξ π diuidet punctum π lineam quoque c f bifariam: & erit plani eius, & trianguli g h K communis sectio g u; quòd pũctum u in medio lineæ h K



positum sit. Similiter demonstrabimus centrum grauitatis prismatis in ipsa g u inesse. sit autem planorum c f n l, a d π ξ communis sectio linea ρ σ τ; quæ quidem prismatis axis erit, cum transeat per centra grauitatis triangulorum a b c, g h κ, d e f, ex quartadecima eiusdem. ergo centrum grauitatis prismatis a f est punctum σ, centrum scilicet trianguli

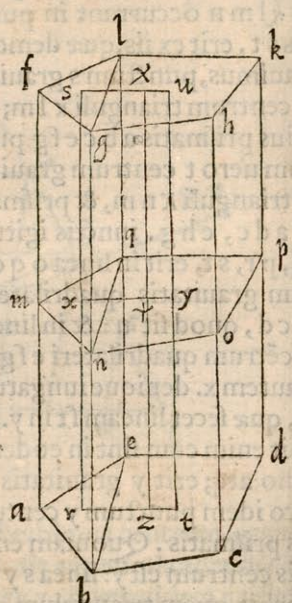
trianguli g h K, & ipsius ρ τ axis medium.

Sit prisma a g, cuius opposita plana sint quadrilatera a b c d, e f g h: secenturq; a e, b f, c g, d h bifariam: & per diuisiones planum ducatur; quod sectionem faciat quadrilaterum K l m n. Deinde iuncta a c per lineas a c, a e ducatur planum secãs prisma, quod ipsum diuidet in duo prismata triangulares bases habentia a b c e f g, a d c e h g. Sint autẽ triangulorum a b c, e f g grauitatis centra o p: & triangulorum a d c, e h g centra q r: iunganturq; o p, q r; quæ plano k l m n occurrant in punctis s t. erit ex iis, quæ demonstrauimus, punctum s grauitatis centrum trianguli κ l m; & ipsius prismatis a b c e f g: punctum uero t centrum grauitatis trianguli K n m, & prismatis a d c, e h g. iunctis igitur o q, p r, s t, erit in linea o q cẽtrum grauitatis quadrilateri a b c d, quod sit u: & in linea p r cẽtrum quadrilateri e f g h sit autem x. denique iungatur u x, quæ secet lineam s t in y. secabit enim cum sint in eodem plano: atq; erit y grauitatis centrum quadrilateri K l m n. 5. huius.



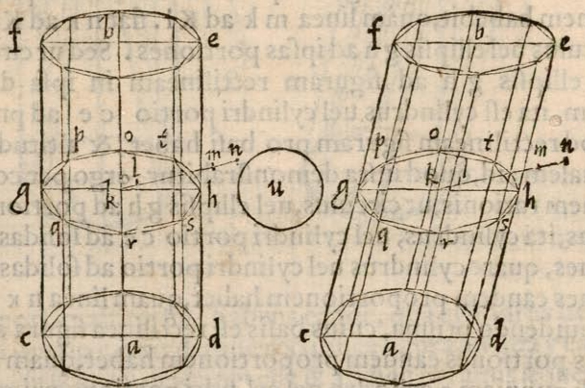
Dico idem punctum y centrum quoque grauitatis esse totius prismatis. Quoniam enim quadrilateri k l m n grauitatis centrum est y: linea s y ad y t eandem proportionem habebit, quam triangulum κ n m ad triangulum k l m, ex 8 Archimedis de centro grauitatis planorum. Vt autem triangulum κ n m ad ipsum κ l m, hoc est ut triangulum a d c ad triangulum a b c, æqualia enim sunt, ita prisma a d c e h g ad priſma a b c e f g. quare linea s y ad y t eandem proportionem habet, quam priſma a d c e h g ad priſma a b c e f g. Sed priſmatis a b c e f g centrum grauitatis eſt s: & priſmatis a d c e h g centrum t. magnitudinis igitur ex his compoſitæ, hoc eſt totius priſmatis a g centrum grauitatis eſt punctum y; medium ſcilicet axis u x, qui oppoſitorum planorum centra coniungit.

Rurſus ſit priſma baſim habens pentagonum a b c d e: & quod ei opponitur ſit f g h K l: ſecenturq; a f, b g, c h, d k, e l bifariam: & per diuiſiones ducto plano, ſectio ſit pẽtagonũ m n o p q. deinde iuncta e b per lineas l e, e b aliud planum ducatur, diuidẽs priſma a k in duo priſmata; in priſma ſcilicet a l, cuius plana oppoſita ſint triangula a b e f g l: & in prima b k, cuius plana oppoſita ſint quadrilatera b c d e g h k l. Sint autem triangulorum a b e, f g l centra grauitatis puncta r ſ: & b c d e, g h k l quadrilaterorum centra t u: iunganturq; r s, t u occurrentes plano m n o p q in punctis x y. & itidem iungãtur r t, ſ u, x y. erit in linea r t cẽtrum grauitatis pentagoni a b c d e; quod ſit z: & in linea ſ u centrum pentagoni f g h κ l. ſit autem χ: & ducatur z χ, quæ dicto plano in ⍊ occurrat. Itaq; punctum x eſt centrum grauitatis trianguli m n q, ac priſmatis a l: & y grauitatis centrum quadrilateri n o p q, ac priſmatis b k. quare y centrum erit pentagoni m n o p q. & ſimiliter



ſimiliter demonſtrabitur totius priſmatis a K grauitatis eſſe centrum. Simili ratione & in aliis priſmatibus illud idem facile demonſtrabitur. Quo autem pacto in omni figura rectilinea centrum grauitatis inueniatur, docuimus in commentariis in ſextam propoſitionem Archimedis de quadratura parabolæ.

Sit cylindrus, uel cylindri portio c e cuius axis a b: ſeceturq; plano per axem ducto; quod ſectionem faciat parallelogrammum c d e f: & diuiſis c f, d e bifariam in punctis



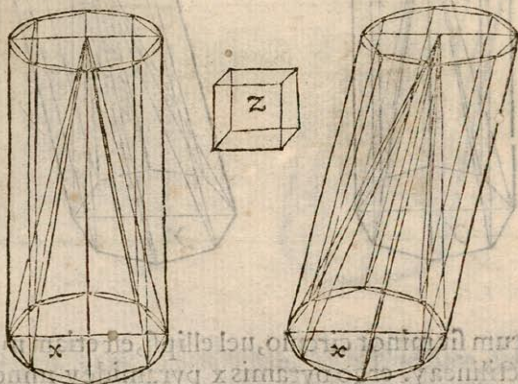
g h, per ea ducatur planum baſi æquidiſtans. erit ſectio g h circulus, uel ellipſis, centrum habens in axe; quod ſit K: atque erunt ex iis, quæ demonſtrauimus, centra grauitatis planorum oppoſitorum puncta a b: & plani g h ipſum k. in quo quidem plano eſt centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis. Dico punctum K cylindri quoque, uel cylindri portionis grauitatis centrum eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit l centrum: ducaturq; k l, & extra figuram in m producatur. quam uero proportionem habet linea m K ad k l 4.huius.

habeat circulus, uel ellipsis g h ad aliud spacium, in quo u: & in circulo, uel ellipsi plane describatur rectilinea figura, ita ut tādem relinquātur portiones minores spacio u, quæ sit o p g q r s h t: descriptaq; simili figura in oppositis planis c d, f e, per lineas sibi ipsis respondentes plana ducātur. Itaque cylindrus, uel cylindri portio diuiditur in prisma, cuius quidem basis est figura rectilinea iam dicta, centrumque grauitatis punctum K: & in multa solida, quæ pro basibus habent relictas portiones, quas nos solidas portiones appellabimus. cum igitur portiones sint minores spacio u, circulus, uel ellipsis g h ad portiones maiorem proportionem habebit, quàm linea m k ad K l. fiat n K ad K l, ut circulus uel ellipsis g h ad ipsas portiones. Sed ut circulus uel ellipsis g h ad figuram rectilineam in ipsa descriptam, ita est cylindrus uel cylindri portio c e ad prisma, quod rectilineam figuram pro basi habet, & altitudinem æqualem; id, quod infra demonstrabitur. ergo per conuersionem rationis, ut circulus, uel ellipsis g h ad portiones relictas, ita cylindrus, uel cylindri portio c e ad solidas portiones, quare cylindrus uel cylindri portio ad solidas portiones eandem proportionem habet, quam linea n K ad k l & diuidendo prisma, cuius basis est rectilinea figura ad solidas portiones eandem proportionem habet, quam n l ad l k. & quoniam a cylindro uel cylindri portione, cuius grauitatis centrum est l, aufertur prisma basim habens rectilineam figurā, cuius centrū grauitatis est K: residuæ magnitudinis ex solidis portionibus cōpositæ grauitatis cētrū erit in linea k l protracta, & in puncto n; quod est absurdū. relinquitur ergo, ut cētrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis sit punctū k. quæ omnia demonstrāda proposuimus.

At uero cylindrum, uel cylindri portionē c e ad prisma, cuius basis est rectilinea figura in spacio g h descripta, & altitudo æqualis; eandem habere

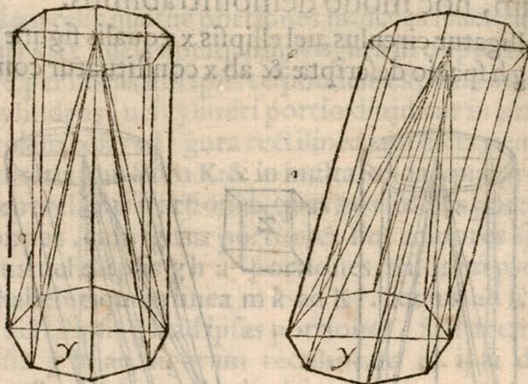
bere proportionem, quam ſpacium g h ad dictā figuram, hoc modo demonſtrabimus.

Intelligatur circulus, uel ellipſis x æqualis figuræ rectilineæ in g h ſpacio deſcriptæ: & ab x conſtituatur conus, uel

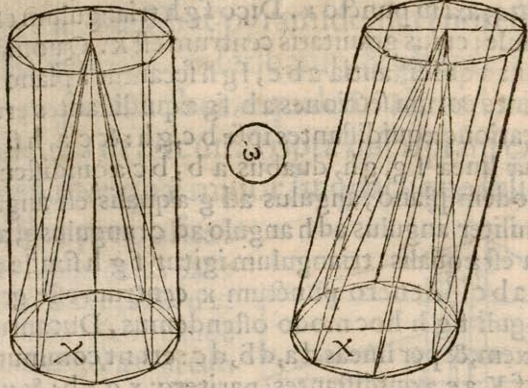


coni portio, altitudinē habens eandē, quā cylindrus uel cylindri portio c e. Sit deinde rectilinea figura, in qua y eadē, quæ in ſpacio g h deſcripta eſt: & ab hac pyramis æquealta conſtituatur. Dico conū uel coni portionē x pyramidi y æqualē eſſe. niſi enim ſit æqualis, uel maior, uel minor erit.

Sit primum maior, et exuperet ſolido z. Itaque in circulo, uel ellipſi x deſcribatur figura rectilinea; & in ea pyramis eandem, quam conus, uel coni portio altitudinem habens, ita ut portiones relictæ minores ſint ſolido z, quemadmodum docetur in duodecimo libro elementorum propoſitione undecima. erit pyramis x adhuc pyramide y maior. & quoniam piramides æque altæ inter ſe ſunt, ſicuti baſes; pyramis x ad piramidem y eandem proportionem habet, quàm figura rectilinea x ad figuram y. Sed figura recti 6.duodecimi.



linea x cum sit minor circulo, uel ellipsi, est etiam minor figura rectilinea y. ergo pyramis x pyramide y minor erit. Sed & maior; quod fieri nõ potest. At si conus, uel coni portio x ponatur minor pyramide y: sit alter conus æque altus, uel altera coni portio χ ipsi pyramidi y æqualis. erit eius basis circulus, uel ellipsis maior circulo, uel ellipsi x, quorum excessus sit spacium ω. Si igitur in circulo, uel ellipsi χ figura rectilinea describatur, ita ut portiones relictæ sint ω spacio minores, eiusmodi figura adhuc maior erit circulo, uel ellipsi x, hoc est figura rectilinea y. & pyramis in ea constituta minor cono, uel coni portione χ, hoc est minor pyramide y. est ergo ut χ figura rectilinea ad figuram rectilineam y, ita pyramis χ ad pyramidem y. quare cum figura rectilinea χ sit maior figura y: erit & pyramis χ pyramide y maior. sed erat minor; quod rursus fieri non potest. non est igitur conus, uel coni portio x neque maior, neque minor pyramide y. ergo ipsi necessario est æqualis. Itaque quoniam ut conus ad conum, uel coni portio ad coni

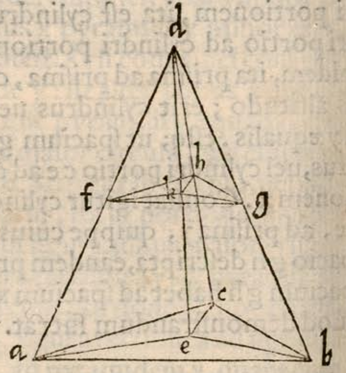


ni portionem, ita eſt cylindrus ad cylindrum, uel cylindri portio ad cylindri portionem: & ut pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma, cum eadem ſit baſis, & æqualis altitudo; erit cylindrus uel cylindri portio x priſmati y æqualis. eſtq; ut ſpacium g h ad ſpacium x, ita cylindrus, uel cylindri portio c e ad cylindrum, uel cylindri portionem x. Conſtat igitur cylindrum uel cylindri portionẽ c e, ad priſma y, quippe cuius baſis eſt figura rectilinea in ſpacio g h deſcripta, eandem proportionem habere, quam ſpacium g h habet ad ſpacium x, hoc eſt ad dictam figuram. quod demonſtrandum fuerat. 7. quinti

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si pyramis ſecetur plano baſi æquidiſtante; ſectio erit figura ſimilis ei, quæ eſt baſis, centrum grauitatis in axe habens.

SIT pyramis, cuius basis triangulum a b c; axis d e: & secetur plano basi æquidistante; quod sectionẽ faciat f g h; occurratq; axi in puncto K. Dico f g h triangulum esse, ipsi a b c simile; cuius grauitatis centrum est K. Quoniã enim duo plana æquidistantia a b c, f g h secantur à plano a b d communes eorum sectiones a b, f g æquidistantes erunt: & eadem ratione æquidistantes ipsæ b c, g h: & c a, h f. Quòd cum duæ lineæ f g, g h, duabus a b, b c æquidistent, nec sint in eodem plano; angulus ad g æqualis est angulo ad b: & similiter angulus ad h angulo ad c: angulusq; ad f ei, qui ad a est æqualis. triangulum igitur f g h simile est triangulo a b c. At uero punctum K centrum esse grauitatis trianguli f g h hoc modo ostendemus. Ducantur plana per axem, & per lineas d a, d b, d c: erunt communes sectiones f K, a e æquidistantes: pariterq; K g, e b; & K h, e c: quare angulus K f h angulo e a c; & angulus K f g ipsi e a b est æqualis. Eadem ratione anguli ad g angulis ad b: & anguli ad h iis, qui ad c æquales erunt. ergo puncta e K in triangulis a b c, f g h similiter sunt posita, per sextam positionem Archimedis in libro de centro grauitatis planorum. Sed cum e sit centrum grauitatis trianguli a b c, erit ex undecima propositione eiusdem libri, & K trianguli f g h grauitatis centrum. id quod demonstrare oportebat. Non aliter in ceteris pyramidibus, quod propositum est demonstrabitur.



16. undecimi

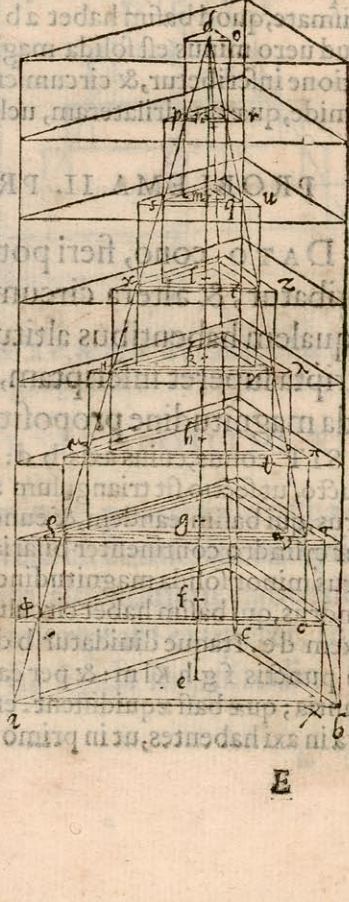
10. undecimi.

16. undecimi

10. undecimi

PROBLEMA I. PROPOSITIO X.

DATA qualibet pyramide, fieri poteſt, ut figura ſolida in ipſa inſcribatur, & altera circũſcribatur ex priſmatibus æqualem altitudinem habẽtibus, ita ut circumſcripta inſcriptam excedat magnitudine, quæ minor ſit quacũque ſolida magnitudine propoſita.

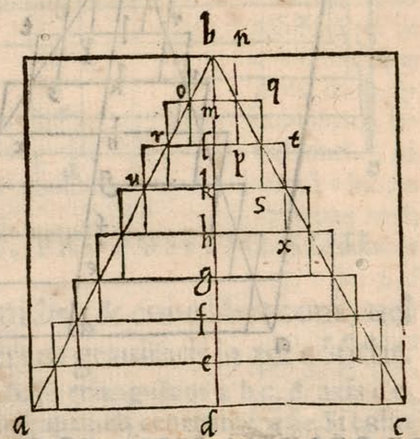


Sit pyramis, cuius baſis triangulũ a b c; axis d e. Sitq; priſma, quod eandẽ baſim habeat, & axem eundem. Itaque hoc priſmate continenter ſecto biſariam, plano baſi æquidiſtã te, relinquetur tãdem priſma quoddam minus propoſita magnitudine: quod quidem baſim eandem habeat, quam pyramis, & axem e f. diuidatur d e in partes æquales ipſi e f in punctis g h k l m n: & per diuiſiones plana ducãtur: quæ baſibus æquidiſtent, erunt ſectiones, triangula ipſi a b c ſimilia, ut proxime oſtendimus. ab uno quoque autẽ horum triangulorum duo priſmata cõſtruantur; unum quidem ad partes e; alterum ad partes d. in pyramide igitur inſcripta erit quædam figura, ex priſmatibus æqualem altitudinem habentibus cõſtans, ad partes e: & altera circumſcripta ad partes d. Sed unumquodque eorum priſmatum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale eſt priſmati, quod ab eodem fit triangulo in figura circumſcripta: nam priſma p q priſmati p o eſt æquale; priſma s t æquale priſmati s r; priſma x y priſmati x u; priſma $\nu\theta$ priſmati ν z; priſma μ ν priſmati μ λ; priſma $\rho\sigma$ priſmati $\rho\pi$; & priſma $\phi\chi$ priſmati $\phi\tau$ æquale. relinquitur ergo, ut circumſcripta figura exuperet inſcriptã priſmate, quod baſim habet a b c triangulum, & axem e f. Illud uero minus eſt ſolida magnitudine propoſita. Eadẽ ratione inſcribetur, & circumſcribetur ſolida figura in pyramide, quæ quadrilateram, uel plurilaterã baſim habeat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XI.

DATO cono, fieri poteſt, ut figura ſolida inſcribatur, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem habentibus altitudinem, ita ut circumſcripta ſuperet inſcriptam, magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

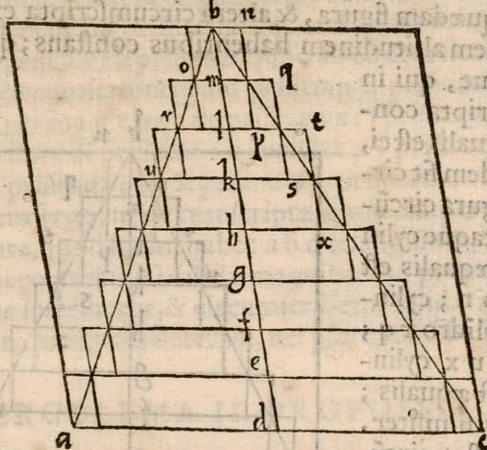
SIT conus, cuius axis b d: & ſecetur plano per axem ducto, ut ſectio ſit triangulum a b c: intelligaturq; cylindrus, qui baſim eandem, & eundem axem habeat. Hoc igitur cylindro continenter biſariam ſecto, relinquetur cylindrus minor ſolida magnitudine propoſita. Sit autem is cylindrus, qui baſim habet circulum circa diametrum a c, & axem d e. Itaque diuidatur b d in partes æquales ipſi d e in punctis f g h K l m: & per ea ducantur plana conum ſecantia; quæ baſi æquidiſtent. erunt ſectiones circuli, centra in axi habentes, ut in primo libro conicorum, propoſitione cione quarta Apollonius demonſtrauit. Si igitur à ſingulis horum circulorum, duo cylindri fiant; unus quidem ad baſis partes; alter ad partes uerticis: inſcripta erit in cono ſolida quædam figura, & altera circumſcripta ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtans; quorum unuſquiſque, qui in figura inſcripta continetur æqualis eſt ei, qui ab eodem fit circulo in figura circũſcripta. Itaque cylindrus o p æqualis eſt cylindro o n; cylindrus r s cylĩdro r q; cylindrus u x cylindro u t eſt æqualis; & alii aliis ſimiliter. quare conſtat circũſcriptam figuram ſuperare inſcriptam cylindro, cuius baſis eſt circulus circa diametrum a c, & axis d e. atque hic eſt minor ſolida magnitudine propoſita.



PROBLEMA III. PROPOSITIO XII.

DATA coni portione, poteſt ſolida quædam figura inſcribi, & altera circumſcribi ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumſcripta inſcriptam exuperet, magnitudine, quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita.

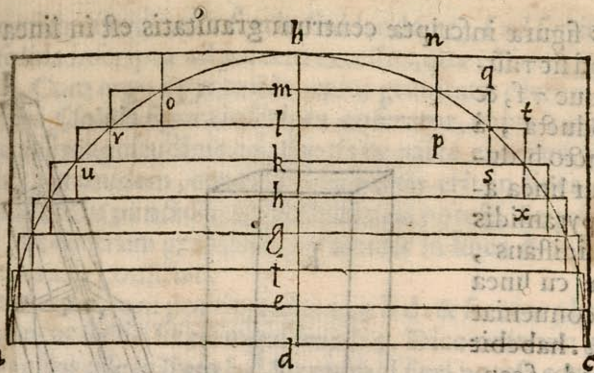
Figuram eiuſmodi, & inſcribemus, & circūſcribemus, ita ut in cono dictum eſt.



PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XIII.

DATA ſphæræ portione, quæ dimidia ſphæra maior non ſit, poteſt ſolida quædam portio inſcribi & altera circumſcribi ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ita ut circumſcripta inſcriptam excedat magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

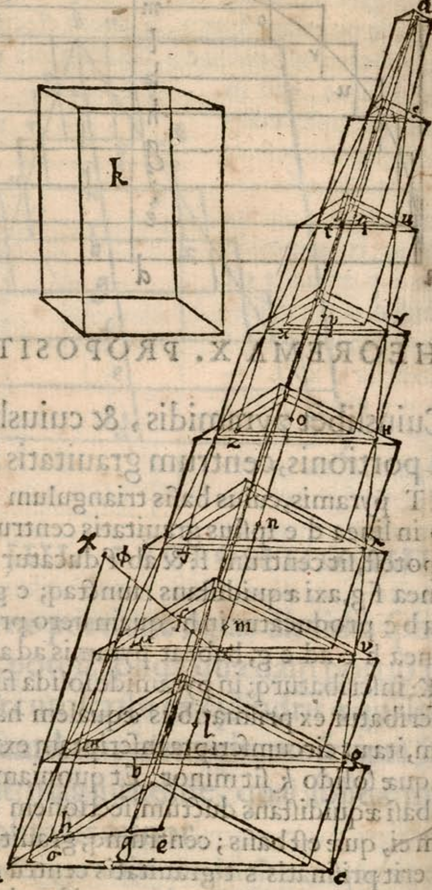
HOC etiam eodem prorſus modo fiet: atque ut ab Archimede traditum eſt in conoidum, & ſphæroidum portionibus, propoſitione uigeſimaprima libri de conoidibus, & ſphæroidibus.



THEOREMA X. PROPOSITIO XIIII.

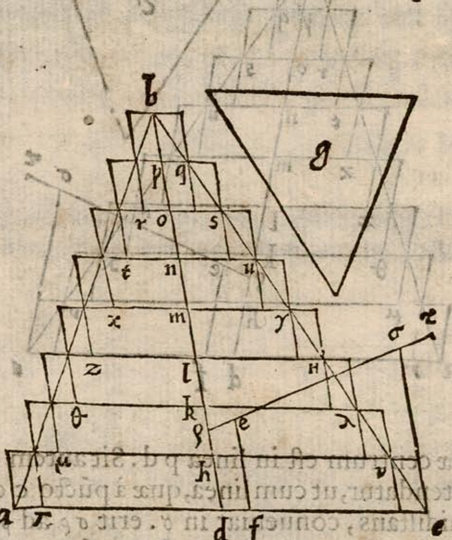
Cuiuslibet pyramidis, & cuiuslibet coni, uel coni portionis,centrum grauitatis in axe cõſiſtit.

SIT pyramis,cuius baſis triangulum a b c:& axis d e. Dico in linea d e ipſius grauitatis centrum ineſſe.Si enim fieri poteſt,ſit centrum f: & ab f ducatur ad baſim pyramidis linea f g,axi æquidiſtans: iunctaq; e g ad latera trianguli a b c producatur in h. quam uero proportionem habet linea h e ad e g, habeat pyramis ad aliud ſolidum, in quo K: inſcribaturq; in pyramide ſolida figura,& altera circumſcribatur ex priſmatibus æqualem habentibus altitudinem,ita ut circumſcripta inſcriptam exuperet magnitudine,quæ ſolido k ſit minor. Et quoniam in pyramide planum baſi æquidiſtans ductum ſectionem facit figuram ſimilem ei, quæ eſt baſis; centrumq; grauitatis in axe habentem: erit priſmatis s t grauitatis centrũ in linea r q; priſmatis u x centrum in linea q p; priſmatis y z in linea p o; priſmatis κ θ in linea o n; priſmatis λ μ in linea n m; priſmatis ν π in m l; & denique priſmatis ρ σ in l e. quare totius figuræ inſcriptæ centrum grauitatis eſt in linea r e quod ſit τ: iūctaque τ f, & producta, à puncto h ducatur linea axi pyramidis æquidiſtans, quæ cū linea τ f conueniat in φ. habebit φ τ ad τ f eandem proportionem, quā h e ad e g. Quoniam igitur exceſſus, quo circūſcripta figura inſcriptam ſuperat, minor eſt ſolido κ; pyramis ad eundē exceſſū maiorē proportionē habet, quàm ad κ ſolidum: uidelicet maiorem, quàm linea h e ad e g; hoc eſt quàm φ τ ad τ f: & propterea multo maiorem habet ad partem exceſſus, quæ intra pyramidem comprehenditur. Itaque habeat

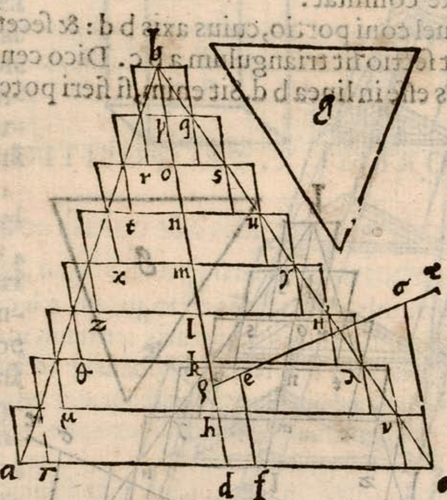


beat eam, quam χ τ ad τ f. erit diuidendo ut χ f ad f τ, ita figura solida inscripta ad partem excessus, quæ est intra pyramidem. Cum ergo à pyramide, cuius grauitatis cẽtrum est punctum f, solida figura inscripta auferatur, cuius centrũ τ: reliquæ magnitudinis constantis ex parte excessus, quæ est intra pyramidem, centrum grauitatis erit in linea τ f producta, & in puncto χ. quod fieri non potest. Sequitur igitur, ut centrum grauitatis pyramidis in linea d e; hoc est in eius axe consistat.

Sit conus, uel coni portio, cuius axis b d: & secetur plano per axem, ut sectio sit triangulum a b c. Dico centrum grauitatis ipsius esse in linea b d. Sit enim, si fieri potest, centrũ



e: perq; e ducatur e f axi æquidistans: & quam proportionem habet c d ad d f, habeat conus, uel coni portio ad solidum g: inscribatur ergo in cono, uel coni portione soli da figura, & altera circumscribatur ex cylindris, uel cylindri portionibus, sicuti dictum est, ita ut excessus, quo figura circumscripta inscriptam superat, sit solido g minor. Itaque centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis q r est in linea p o; cylindri, uel cylindri portionis s t centrum in linea o n; centrum u x in linea n m; y z in m b; ηθ in l k; λ μ in K h; & denique ν π centrum in h d. ergo figu-



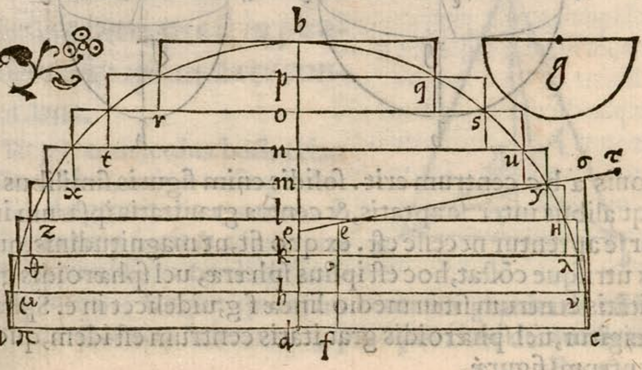
ræ inscriptæ centrum est in linea p d. Sit autem ρ: & iuncta ρ e protendatur, ut cum linea, quæ à pũcto c ducta fuerit axi æquidistans, conueniat in σ. erit σρ ad ρ e, ut c d ad d f: & conus, seu coni portio ad excessum, quo circumscripta figura inscriptam superat, habebit maiorem proportionem, quàm σρ ad ρ e. ergo ad partem excessus, quæ intra ipsius superficiem comprehenditur, multo maiorem proportionem habebit. habeat eam, quam τρ ad ρ e. erit diuidendo

diuidendo figura ſolida inſcripta ad dictam exceſſus partem, ut τ e ad e ρ. & quoniam à cono, ſeu coni portione, cuius grauitatis centrum eſt e, auſertur figura inſcripta, cuius centrum ρ: reſiduæ magnitudinis compoſitæ ex parte exceſſus, quæ intra coni, uel coni portionis ſuperficiem continetur, centrum grauitatis erit in linea ρ e protracta, atque in puncto τ. quod eſt abſurdum. cõſtat ergo centrũ grauitatis coni, uel coni portionis, eſſe in axe b d: quod demonſtrandum propoſuimus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XV.

Cuiuslibet portionis ſphæræ uel ſphæroidis, quæ dimidia maior non ſit: itemq; cuiuslibet portionis conoidis, uel abſciſſæ plano ad axem recto, uel non recto, centrum grauitatis in axe conſiſtit.

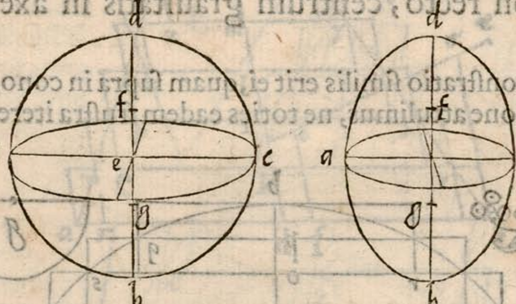
Demonſtratio ſimilis erit ei, quam ſupra in cono, uel coni portione attulimus, ne toties eadem fruſtra iterentur.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XVI.

In ſphæra, & ſphæroide idem eſt grauitatis, & figuræ centrum.

Secetur ſphæra, uel ſphæroides plano per axem ducto; quod ſectionem faciat circulum, uel ellipſim a b c d, cuius diameter, & ſphæræ, uel ſphæroidis axis d b; & centrum e. Dico e grauitatis etiam centrum eſſe. ſecetur enim altero plano per e, ad planum ſecans recto, cuius ſectio ſit circulus circa diametrum a c. erunt a d c, a b c dimidiæ portiones ſphæræ, uel ſphæroidis. & quoniam portionis a d c grauitatis centrum eſt in linea d, & centrum portionis a b c in ipſa b e; totius ſphæræ, uel ſphæroidis grauitatis centrum in axe d b conſiſtet. Quod ſi portionis a d c centrum grauitatis ponatur eſſe f. & fiat ipſi f e æqualis e g: punctũ g por-



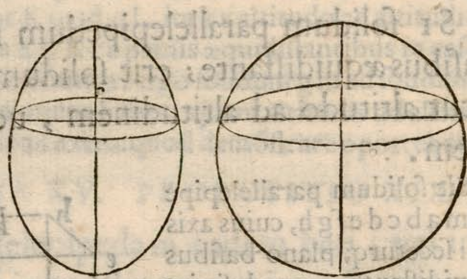
per 2. petitionem 4 Archimedis. tionis a b c centrum erit. ſolidis enim figuris ſimilibus & æqualibus inter ſe aptatis, & centra grauitatis ipſarum inter ſe aptentur neceſſe eſt. ex quo fit, ut magnitudinis, quæ ex utriſque cõſtat, hoc eſt ipſius ſphæræ, uel ſphæroidis grauitatis centrum ſit in medio lineæ f g, uidelicet in e. Sphæræ igitur, uel ſphæroidis grauitatis centrum eſt idem, quod centrum figuræ.

Ex

135

Ex demonſtratis perſpicue apparet, portioni ſphæræ uel ſphæroidis, quæ dimidia maior eſt, cẽtrum grauitatis in axe conſiſtere.

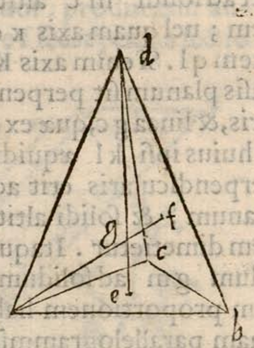
Data enim qualibet maiori portiõe, quoniã totius ſphæræ, uel ſphæroidis grauitatis centrum eſt in axe; eſt autem & in axe centrum portionis minoris:



reliquæ portionis uidelicet maioris centrum in axe neceſſario conſiſtet.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVII.

Cuiuslibet pyramidis triãgularem baſim habẽtis grauitatis centrum eſt in puncto, in quo ipſius axes conueniunt.

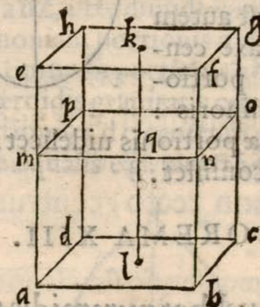


Sit pyramis, cuius baſis triangulum a b c, axis d e: ſitq; trianguli b d c grauitatis centrum f: & iungatur a f. erit & a f axis eiuſdem pyramidis ex tertia diffinitione huius. Itaque quoniam centrum grauitatis eſt in axe d e; eſt autem & in axe a f; quod proxime demonſtraui a 11. undecimi. i. ſexti.

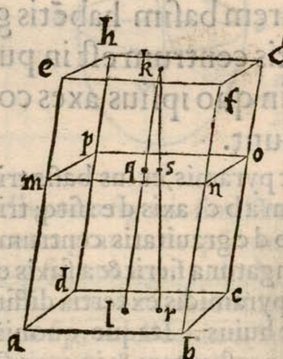
mus: erit utique grauitatis centrum pyramidis punctum g: in quo scilicet ipsi axes conueniunt.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVIII.

Si solidum parallelepipedum secetur plano basibus æquidistante; erit solidum ad solidum, sicut altitudo ad altitudinem, uel sicut axis ad axem.



Sit solidum parallelepipedum a b c d e f g h, cuius axis k l: seceturq; plano basibus æquidistante, quod faciat sectionem m n o p; & axi in puncto q occurrat. Dico solidum g m ad solidum m c eam proportionem habere, quam altitudo solidi g m habet ad solidi m c altitudinem; uel quam axis k q ad axem q l. Si enim axis K l ad basis planum sit perpendicularis, & linea g c, quæ ex quinta huius ipsi k l æquidistat, perpendicularis erit ad idẽ planum, & solidi altitudinem dimetietur. Itaque solidum g m ad solidum m c eam proportionem habet, quam parallelogrammũ g m ad parallelogrammum n c, hoc est quam linea g o, quæ



25. undecimi.

1. sexti.

est

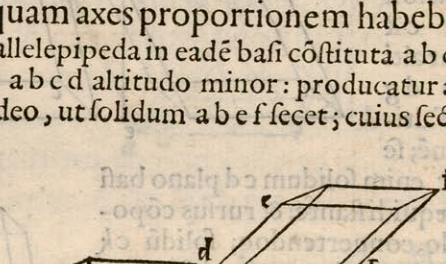
 136

eſt ſolidi g m altitudo ad o c altitudinem ſolidi m c, uel quã axis k q ad q l axem. Si uero axis k l non ſit perpendicularis ad planum baſis; ducatur a puncto k ad idem planum perpendicularis k r, occurrẽs plano m n o p in s. ſimiliter demõſtrabimus ſolidum g m ad ſolidũ m c ita eſſe, ut axis k q ad axem q l. Sed ut k q ad q l, ita k s altitudo ad altitudinem s r; nam lineæ k l, k r à planis æquidiſtantibus in eaſdem proportiones ſecantur. 17. undecimi ergo ſolidum g m ad ſolidum m c eandẽ proportionem habet, quam altitudo ad altitudinẽ, uel quam axis ad axem. quod demõſtrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XIX.

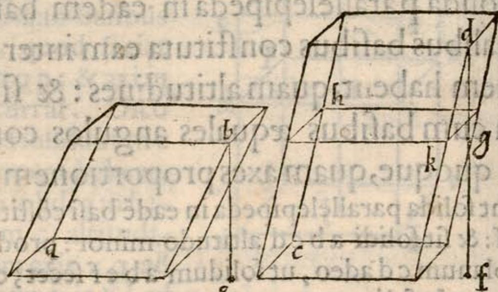
Solida parallelepipeda in eadem baſi, uel in æqualibus baſibus conſtituta eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines: & ſi axes ipſorum cum baſibus æquales angulos contineant, eam quoque, quam axes proportionem habebũt.

Sint ſolida parallelepipeda in eadẽ baſi cõſtituta a b c d, a b e f: & ſit ſolidi a b c d altitudo minor: producatur autem planum c d adeo, ut ſolidum a b e f ſecet; cuius ſectio ſit g h. erũt ſolida a b c d, a b g h in eadem baſi, & æquali altitudine inter ſe æqualia. 29. undecimi Quoniã igitur ſolidum a b e f ſecatur plano baſibus æquidiſtãte, erit ſolidum g h e f ad ipſum a b g h 18. huius

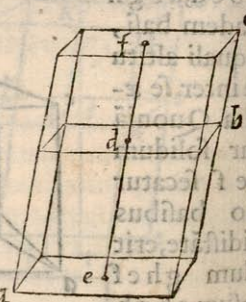


ut altitudo ad altitudinem: & componendo conuertendo
7.quinti. que solidum a b g h, hoc est solidum a b c d ipsi æquale, ad solidum a b e f, ut altitudo solidi a b c d ad solidi a b e f altitudinem.

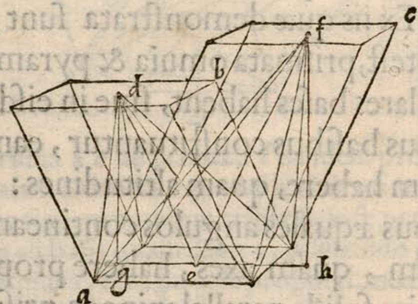
Sint solida parallelepipeda a b, c d in æqualibus basibus constituta: sitq; b e altitudo solidi a b: & solidi c d altitudo d f; quæ quidem maior sit, quàm b e. Dico solidum a b ad solidum c d eandem habere proportionem, quam b e ad d f. abscindatur enim à linea d f æqualis ipsi b e, quæ sit g f: & per g ducatur planum secans solidum c d; quod basibus
31. undecimi æquidistet, faciatq; sectionē h k. erunt solida a b, c k æque alta inter se æqualia cū æquales bases habeant.
18.huius Sed solidū h d ad solidum c k est, ut altitudo d g ad g f altitudinē; secatur enim solidum c d plano basibus æquidistante: & rursus cōponendo, conuertendoq; solidū c k
7.quinti. ad solidum c d, ut g f ad f d. ergo solidum a b, quod est æquale ipsi c k ad solidum c d eam proportionem habet, quam altitudo g f, hoc est b e ad d f altitudinem.



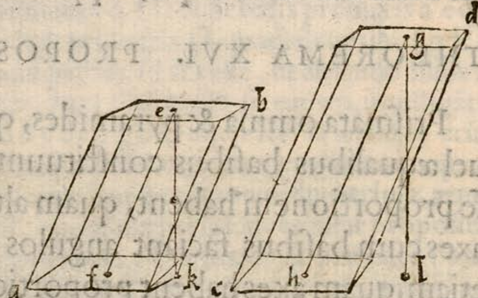
Sint deinde solida parallelepipeda a b, a c in eadem basi; quorum axes d e, f e cum ipsa æquales angu



los contineant. Dico solidum a b ad solidum a c eãdem habere proportionem, quam axis d e ad axem e f. Si enim axes in eadem recta linea fuerint constituti, hæc duo solida, in unum, atque idem solidum conuenient. quare ex iis, quæ proxime tradita sunt, habebit solidum a b ad solidum a c eandem proportionem, quam axis d e ad e f axem. Si uero axes non sint in eadem recta linea, demittantur a punctis d, f perpendiculares ad basis planum, d g, f h: & iunganturque e g, e h. Quoniam igitur axes cum basibus æquales angulos continent, erit d e g angulus æqualis angulo f e h: & sunt anguli ad g h recti, quare & reliquus e d g æqualis erit reliquo e f h: & triangulum d e g triãgulo f e h simile. ergo g d ad d e est, ut h f ad f e: & permutando g d ad h f, ut d e ad e f. Sed solidum a b ad solidum a c eandem proportionem habet, quam d g altitudo ad altitudinẽ f h. ergo & eandẽ habebit, quã axis d e ad e f axẽ.



Postremo sint solida parallelepipeda a b, c d in



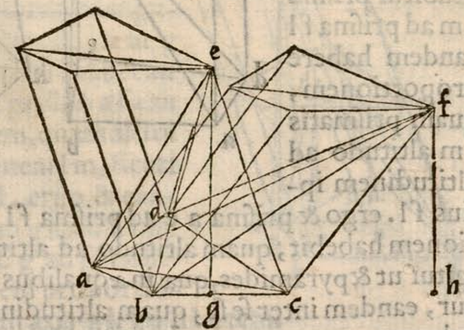
æqualibus baſibus, quorum axes cum baſibus æquales angulos faciant. Dico ſolidum a b ad ſolidũ c d ita eſſe, ut axis e f ad axem g h: nam ſi axes ad planum baſis recti ſint, illud perſpicue conſtat: quoniam eadem linea, & axem & ſolidi altitudinem determinabit. Si uero ſint inclinati, à punctis e g ad ſubiectum planum perpendiculares ducantur e k, g l: & iungantur f k, h l. rurſus quoniam axes cum baſibus æquales faciunt angulos, eodem modo demonſtrabitur, triangulum e f K triangulo g h l ſimile eſſe: & e k ad g l, ut e f ad g h. Solidum autem a b ad ſolidum c d eſt, ut e K ad g l. ergo & ut axis e f ad axem g h. quæ omnia demonſtrare oportebat.

Ex iis quæ demonſtrata ſunt, facile conſtare poteſt, priſmata omnia & pyramides, quæ triangulares baſes habent, ſiue in eiſdem, ſiue in æqua-
15.quinti libus baſibus conſtituantur, eandem proportionem habere, quam altitudines: & ſi axes cum baſibus æquales angulos contineant, ſimiliter eandem, quam axes, habere proportionem: ſunt
28.undecimi. enim ſolida parallelepipeda priſmatum triangula-
7.duodecimi. res baſes habentiũ dupla; & pyramidum ſextupla.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XX.

Priſmata omnia & pyramides, quæ in eiſdem, uel æqualibus baſibus conſtituuntur, eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines: & ſi axes cum baſibus faciant angulos æquales, eam etiam, quam axes habent proportionem.

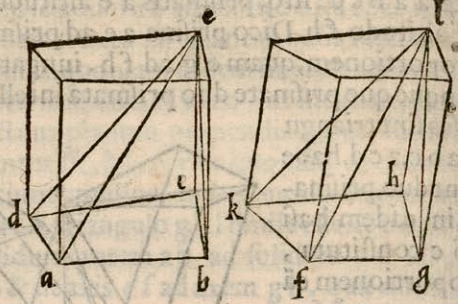
Sint duo prisinata a e, a f, quorum eadem basis quadrilatera a b c d: sitq; prismatis a e altitudo e g; & prismatis a f altitudo f h. Dico prisma a e ad prisma a f eam habere proportionem, quam e g ad f h. iungatur enim a c: & in unoquoque prismate duo prismata intelligantur, quorum bases sint triangula a b c, a c d. habebunt duo prismate in eadem basi a b c constituta, proportionem eādem, quam ipsorum altitudines e g, f h, ex iam demonstratis. & similiter alia duo, quæ sunt in basi a

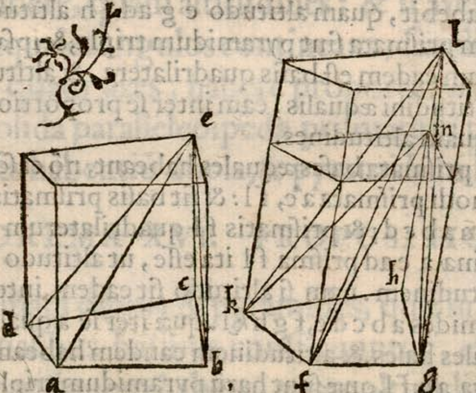


c d. quare totum prisma a e ad prisma a f eandem proportionem habebit, quam altitudo e g ad f h altitudinem. 12. quinti
Quòd cum prismata sint pyramidum tripla, & ipsæ pyramides, quarum eadem est basis quadrilatera, & altitudo prismatum altitudini æqualis, eam inter se proportionem habebunt, quam altitudines.

Si uero prismata bases æquales habeant, nō easdem, sint duo eiusmodi prismata a e, f l: & sit basis prismatis a e quadrilaterum a b c d; & prismatis f l quadrilaterum f g h k. Dico prisma a e ad prisma f l ita esse, ut altitudo illius ad huius altitudinem. nam si altitudo sit eadem, intelligātur duæ pyramides a b c d e, f g h k l. quæ īter se æquales erūt, 6. duodecimi
cum æquales bases, & altitudinem eandem habeant. quare & prismata a e, f l, quæ sunt harū pyramidum tripla, æqualia sint necesse est. ex quibus perspicue constat propositū. 15. quinti
Si uero altitudo prismatis f l sit maior, à prismate f l abscindatur prisma f m, quod æque altum sit, atq; ipsum a e.

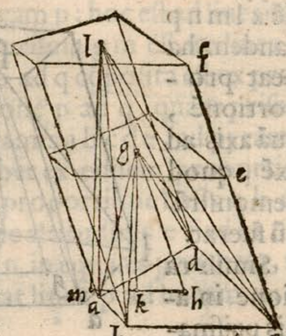
erunt eadem ratione prismata a e, f m inter se æqualia. quare similiter demonstrabitur prisma f m ad prisma f l eandem habere proportionem, quam prismatis f m altitudo ad altitudinem ipsius f l. ergo & prisma a e ad prisma f l eandem proportionem habebit, quam altitudo ad altitudinem. sequitur igitur ut & pyramides, quæ in æqualibus basibus constituũtur, eandem inter se se, quam altitudines, proportionem habeant.

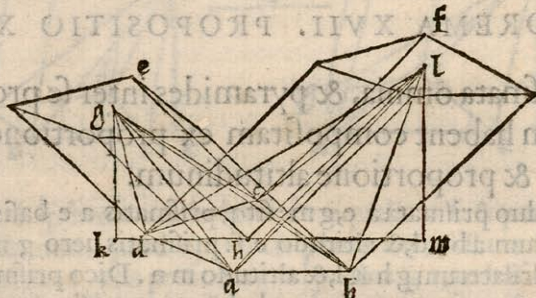




Sint deinde prismata a e, a f in eadem basi a b c d; quorũ axes cum basibus æquales angulos contineant: & sit prismatis

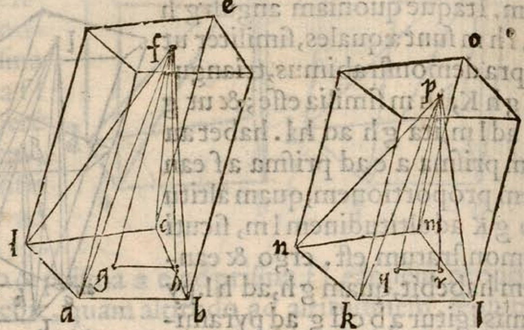
matis a e axis g h; & prismatis a f axis l h. Dico prisma a e ad prisma a f eam proportionem habere, quam g h ad h l. ducantur à punctis g l perpendiculares ad basis planum g K, l m: & iungantur k h, h m. Itaque quoniam anguli g h k, l h m sunt æquales, similiter ut supra demonstrabimus, triangula g h K, l h m similia esse; & ut g K ad l m, ita g h ad h l. habet autem prisma a e ad prisma a f eandem proportionem, quam altitudo g K ad altitudinem l m, sicuti demonstratum est. ergo & eandem habebit, quam g h, ad h l. pyramis igitur a b c d g ad pyramidem a b c d l eandem proportionem habebit, quam axis g h ad h l axem.





Denique sint prismata a e, K o in æqualibus basibus a b c d, k l m n constituta; quorum axes cum basibus æquales faciant angulos: sitq; prismatis a e axis f g, & altitudo f h: prismatis autem k o axis p q, & altitudo p r. Dico prisma a e ad prisma K o ita esse, ut f g ad p q. iunctis enim g h;

q r, eodem, quo ſupra, modo oſtendemus f g ad p q, ut f h ad p r. ſed priſma a e ad ipſum κ o eſt, ut f h ad p r. ergo & ut f g axis ad axem p q. ex quibus fit, ut pyramis a b c d f ad pyramidē κ l m n p eandem habeat proportionē, quā axis ad axē. quod demonſtrādū fuerat.



Simili ratione in aliis priſmatibus & pyramidibus eadem demonſtrabuntur.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXI.

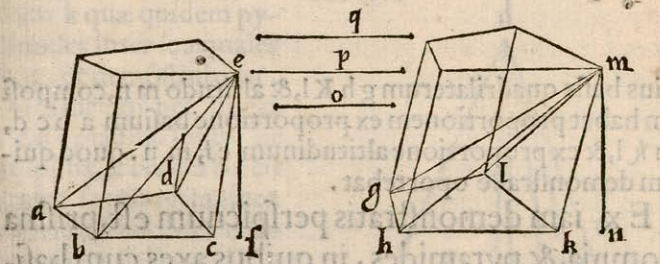
Priſmata omnia, & pyramides inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.

Sint duo priſmata a e, g m: ſitq; priſmatis a e baſis quadrilaterum a b c d, & altitudo e f: priſmatis uero g m baſis quadrilaterum g h K l, & altitudo m n. Dico priſma a e ad priſma g m proportionem habere compoſitam ex proportione baſis a b c d ad baſim g h k l, & ex proportione altitudinis e f, ad altitudinem m n.

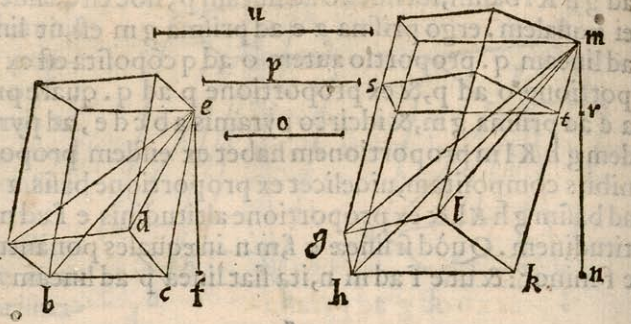
Sint enim primum e f, m n æquales: & ut baſis a b c d ad baſim g h κ l, ita fiat linea, in qua o ad lineam, in qua p: ut autem e f ad m n, ita linea p ad lineam q. erunt lineæ p q inter ſe æquales. Itaque priſma a e ad priſma g m eā

pro

proportionem habet, quam basis a b c d ad basim g h κ l: si enim intelligantur duæ pyramides a b c d e, g h k l m, habebunt hæ inter se proportionem eandem, quam ipsarum bases ex sexta duodecimi elementorum. Sed ut basis a b c d ad g h K l basim, ita linea o ad lineam p; hoc est ad lineam q ei æqualem. ergo prisma a e ad prisma g m est, ut linea o ad lineam q. proportio autem o ad q cõposita est ex proportione o ad p, & ex proportione p ad q. quare prisma a e ad prisma g m, & idcirco pyramis a b c d e, ad pyramidem g h K l m proportionem habet ex eisdem proportionibus compositam, uidelicet ex proportione basis a b c d ad basim g h K l, & ex proportione altitudinis e f ad m n altitudinem. Quòd si lineæ e f, m n inæquales ponantur, sit e f minor: & ut e f ad m n, ita fiat linea p ad lineam u: de



inde ab ipsa m n abscindatur r n æqualis e f: & per r ducatur planum, quod oppositis planis æquidistans faciat sectionem s t. erit prisma a e, ad prisma g t, ut basis a b c d ad basim g h k l; hoc est ut o ad p: ut autem prisma g t ad prisma g m, ita altitudo r n; hoc est e f ad altitudinẽ m n; 20.huius uidelicet linea p ad lineam u. ergo ex æquali prisma a e ad prisma g m est, ut linea o ad ipsam u. Sed proportio o ad u cõposita est ex proportione o ad p, quæ est basis a b c d ad basim g h κ l; & ex proportione p ad u, quæ est altitudinis e f ad altitudinem m n. prisma igitur a e ad prisma g m compositam proportionem habet ex proportione basiũ, & proportione altitudinum. Quare & pyramis, cuius basis est quadrilaterum a b c d, & altitudo e f ad pyramidem,



cuius basis quadrilaterum g h K l, & altitudo m n, compositam habet proportionem ex proportione basium a b c d, g h k l, & ex proportione altitudinum e f, m n. quod quidem demonstrasse oportebat.

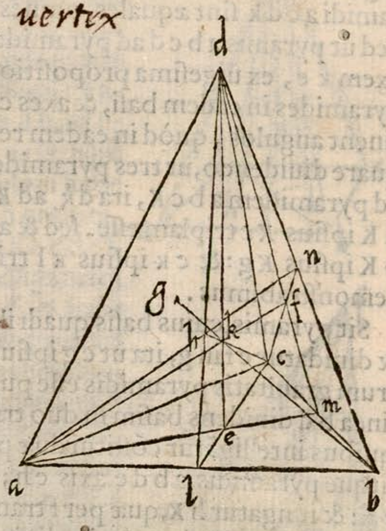
Ex iam demonstratis perspicuum est, prismata omnia, & pyramides, in quibus axes cum basibus æquales angulos continent, proportionem habere compositam ex basium proportione, & proportione axium. demonsttatum est enim, axes inter se eandem proportionem habere, quam ipsæ altitudines.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXII.

Cuiuslibet pyramidis, & cuiuslibet coni, uel

uel coni portionis axis à centro grauitatis ita diuiditur, ut pars, quæ terminatur ad uerticem reliquæ partis, quæ ad baſim, ſit tripla.

Sit pyramis, cuius baſis triangulum a b c; axis d e; & grauitatis centrum K. Dico lineam d k ipſius K e triplam eſſe. trianguli enim b d c centrum grauitatis ſit punctum f; triã guli a d c centrũ g; & trianguli a d b ſit h: & iungantur a f, b g, c h. Quoniam igitur centrũ grauitatis pyramidis in axe cõſiſtit: ſuntq; d e, a f, b g, c h eiuſdẽ pyramidis axes: conue nient omnes in idẽ punctũ k, quod eſt grauitatis centrum. 17.huius
Itaque animo concipiamus hanc pyramidem diuiſam in quatuor pyramides, quarum baſes ſint ipſa pyramidis triangula; & axis punctum k quæ quidem pyramides inter ſe æquales ſunt, ut demõſtrabitur. Ducatur enĩ per lineas d c, d e planum ſecãs, ut ſit ipſius, & baſis a b c cõmunis ſectio recta linea c e l: eiuſdẽ uero & triãguli a d b ſit linea d h l. erit linea a l æqualis ipſi l b: nam centrum grauitatis trianguli conſiſtit in linea, quæ ab angulo ad dimidiam baſim perducitur, ex tertia decima Archimedis. quare triangulum a c l æquale I. ſexti.



eſt triangulo b c l: & propterea pyramis, cuius baſis triangulum a c l, uertex d, eſt æqualis pyramidi, cuius baſis b c l triangulum, & idem uertex. pyramides enim, quæ ab eodẽ 5.duodecimi.

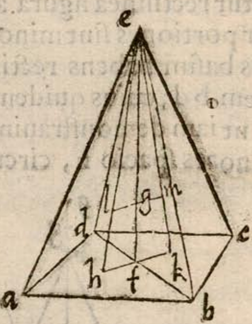
ſunt uertice, eandem proportionem habent, quam ipſarũ baſes. eadem ratione pyramis a c l k pyramidi b c l k: & pyramis a d l k ipſi b d l k pyramidi æqualis erit. Itaque ſi à pyramide a c l d auferantur pyramides a c l k, a d l k: & à pyramide b c l d auferãtur pyramides b c l k, d b l K: quæ relinquuntur erunt æqualia. æqualis igitur eſt pyramis a c d k pyramidi b c d K. Rurſus ſi per lineas a d, d e ducatur planum quod pyramidem ſecet: ſitq; eius & baſis communis ſectio a e m: ſimiliter oſtendetur pyramis a b d K æqualis pyramidi a c d k. ducto denique alio plano per lineas c a, a f: ut eius, & trianguli c d b communis ſectio ſit c f n, pyramis a b c k pyramidi a c d k æqualis demonſtrabitur. cũ ergo tres pyramides b c d k, a b d k, a b c k uni, & eidem pyramidi a c d k ſint æquales, omnes inter ſe ſe æquales erũt. Sed ut pyramis a b c d ad pyramidem a b c k, ita d e axis ad axem k e, ex uigeſima propoſitione huius: ſunt enim hæ pyramides in eadem baſi, & axes cum baſibus æquales continent angulos, quòd in eadem recta linea conſtituantur. quare diuidendo, ut tres pyramides a c d k, b c d K, a b d K, ad pyramidem a b c K, ita d k ad K e. conſtat igitur lineam d K ipſius K e triplam eſſe. ſed & a k tripla eſt K f: itemque b K ipſius K g: & c k ipſius k l tripla. quod eodem modo demonſtrabimus.

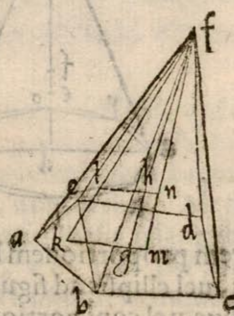
Sit pyramis, cuius baſis quadrilaterum a b c d; axis e f: & diuidatur e f in g, ita ut e g ipſius g f ſit tripla. Dico centrum grauitatis pyramidis eſſe punctum g. ducatur enim linea b d diuidens baſim in duo triangula a b d, b c d: ex quibus intelligãtur cõſtitui duæ pyramides a b d e, b c d e: ſitque pyramidis a b d e axis e h; & pyramidis b c d e axis e K: & iungatur h K, quæ per f tranſibit: eſt enim in ipſa h K centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ ex triangulis a b d, b c d, hoc eſt ipſius quadrilateri. Itaque centrum grauitatis pyramidis a b d e ſit punctum l: & pyramidis b c d e

2. ſexti: ſit m. ducta igitur l m ipſi h m lineæ æquidiſtabit: nam e l ad

l h

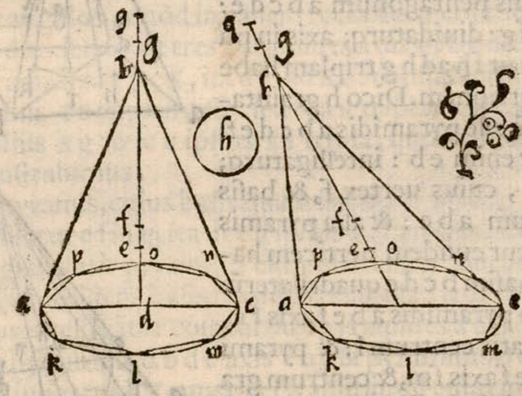
l h eandem habet proportionem, quam e m ad m k, uidelicet triplam. quare linea l m ipsam e f secabit in puncto g: etenim e g ad g f est, ut e l ad l h. præterea quoniam h k, l m æquidistant, erunt triangula h e f, l e g similia: itemq; inter se similia f e k, g e m: & ut e f ad e g, ita h f ad l g: & ita f k ad g m. ergo ut h f ad l g, ita f k ad g m: & permutando ut h f ad f k, ita l g ad g m. sed cum h sit centrum trianguli a b d; & k triãguli b c d: punctũ uero f totius quadrilateri a b c d centrum: erit ex 8. Archimedis de centro grauitatis planorum h f ad f k, ut triangulum b c d ad triangulum a b d: ut autem b c d triangulum ad triangulum a b d; ita pyramis b c d e ad pyramidem a b d e. ergo linea l g ad g m erit, ut pyramis b c d e ad pyramidẽ a b d e. ex quo sequitur, ut totius pyramidis a b c d e punctum g sit grauitatis centrum. Rursus sit pyramis basim habens pentagonum a b c d e: & axem f g: diuidaturq; axis in pũcto h, ita ut f h ad h g triplam habeat proportionem. Dico h grauitatis centrũ esse pyramidis a b c d e f. iungatur enim e b: intelligaturq; pyramis, cuius uertex f, & basis triangulum a b e: & alia pyramis intelligatur eundem uerticem habens, & basim b c d e quadrilaterũ: sit autem pyramidis a b e f axis f k, & grauitatis centrum l: & pyramidis b c d e f axis f m, & centrum grauitatis n: iunganturq; k m, l n; quæ per puncta g h transibunt. Rursus eodem modo, quo supra, demonstrabimus lineas k g m, l h n sibi ipsis æquidistare:





& denique punctum h pyramidis a b c d e f grauitatis esse centrum, & ita in aliis.

Sit conus, uel coni portio axem habens b d: seceturque plano per axem, quod sectionem faciat triangulum a b c: & b d axis diuidatur in e, ita ut b e ipsius e d sit tripla. Dico punctum e coni, uel coni portionis, grauitatis esse centrum. Si enim fieri potest, sit centrum f: & producatur e f extra figuram in g. quam uero proportionem habet g e ad e f, habeat basis coni, uel coni portionis, hoc est circulus, uel ellipsis circa diametrum a c ad aliud spacium, in quo h. Itaque in circulo, uel ellipsi plane describatur rectilinea figura a k l m c n o p, ita ut quæ relinquũtur portiones sint minores spacio h: & intelligatur pyramis basim habens rectilineam figuram a K l m c n o p, & axem b d; cuius quidem grauitatis centrum erit punctum e, ut iam demonstrauimus. Et quoniam portiones sunt minores spacio h, circulus, uel ellipsis ad portiones ma-



iorem proportionem habet, quam g e ad e f. sed ut circulus, uel ellipsis ad figuram rectilineam sibi inscriptam, ita conus, uel coni portio ad pyramidem, quæ figuram rectilineam pro basi habet; & altitudinem æqualem; etenim supra

pra demonstratum est, ita esse cylindrum, uel cylindri portionem ad prisma, cuius basis rectilinea figura, & æqualis altitudo. ergo per conuersionem rationis, ut circulus, uel ellipsis ad portiones, ita conus, uel coni portio ad portiones solidas. quare conus uel coni portio ad portiones solidas maiorem habet proportionem, quam g e ad e f: & diuidendo, pyramis ad portiones solidas maiorem proportionem habet, quam g f ad f e. fiat igitur q f ad f e ut pyramis ad dictas portiones. Itaque quoniam à cono uel coni portione, cuius grauitatis centrum est f, aufertur pyramis, cuius centrum e; reliquæ magnitudinis, quæ ex solidis portionibus constat, centrum grauitatis erit in linea e f protracta, & in puncto q. quod fieri non potest: est enim centrum grauitatis intra. Constat igitur coni, uel coni portionis grauitatis centrum esse punctum e. quæ omnia demonstrare oportebat. 8.huius

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXIII.

QVODLIBET frustum à pyramide, quæ triangularem basim habeat, abscissum, diuiditur in tres pyramides proportionales, in ea proportione, quæ est lateris maioris basis ad latus minoris ipsi respondens.

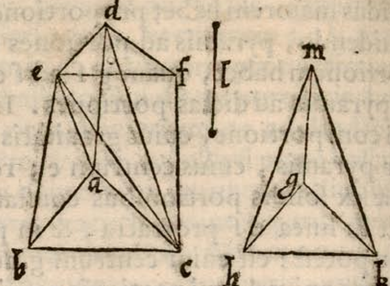
Hoc demonstrauit Leonardus Pisanus in libro, qui de praxi geometriæ inscribitur. Sed quoniam is adhuc impressus non est, nos ipsius demonstrationem breuiter perstringemus, rem ipsam secuti, non uerba. Sit frustum pyramidis a b c d e f, cuius maior basis triangulum a b c, minor d e f: & iunctis a e, e c, c d, per lineas a e, e c ducatur planum secans frustum: itemque per lineas e c, c d; & per c d, d a alia plana ducantur, quæ diuident frustum in tres pyramides a b c e, a d c e, d e f c.

Dico eas proportionales esse in proportione, quæ est lateris a b ad latus d e, ita ut earum maior sit a b c e, media a d c e, & minor d e f c. Quoniam enim lineæ d e, a b æquidistant; & inter ipsas sunt triangula a b e, a d e;

1. sexti. erit triangulum a b e ad triangulum a d e, ut linea a b ad lineam d e. ut autem triangulum a b e ad triangulum a d e, ita pyramis

5. duodecimi. a b e c ad pyramidem a d e c: habent enim altitudinem eandem, quæ est à puncto c ad planum, in quo qua-

11. quinti. drilaterum a b e d. ergo ut a b ad d e, ita pyramis a b e c ad pyramidem a d e c.



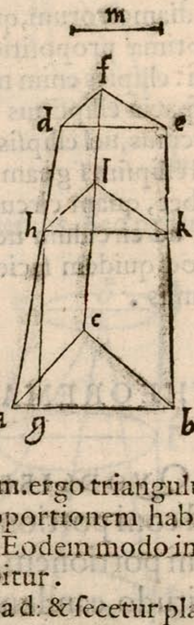
Rursus quoniam æquidistantes sunt a c, d f; erit eadem

4 sexti. ratione pyramis a d c e ad pyramidem c d f e, ut a c ad d f. Sed ut a c ad d f, ita a b ad d e, quoniam triangula a b c, d e f similia sunt, ex nona huius. quare ut pyramis a b c e ad pyramidem a d c e, ita pyramis a d c e ad ipsam d e f c. frustum igitur a b c d e f diuiditur in tres pyramides proportionales in ea proportione, quæ est lateris a b ad d e latus, & earum maior est c a b e, media a d c e, & minor d e f c. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXIIII.

QVODLIBET frustum pyramidis, uel coni, uel coni portionis, plano basi æquidistanti ita secare, ut sectio sit proportionalis inter maiorem, & minorem basim.

SIT frustum pyramidis a e, cuius maior basis triangulum a b c, minor d e f: & oporteat ipsum plano, quod basi æquidistet, ita secare, ut sectio sit proportionalis inter triã gula a b c, d e f. Inueniatur inter lineas a b, d e media proportionalis, quæ sit b g: & à puncto g erigatur g h æquidistans b e, secansq; a d in h: deinde per h ducatur planum basibus æquidistans, cuius sectio sit triangulum h k l. Dico triangulum h K l proportionale esse inter triangula a b c, d e f, hoc est triangulum a b c ad triangulum h K l eandem habere proportionem, quam triãgulum h K l ad ipsum d e f. Quoniã enim lineæ a b, h K æquidistantium planorum sectiones inter se æquidistant: atque æquidistant b k, g h: linea h k ipsi g b est æqualis: & propterea proportionalis inter a b, d e. quare ut a b ad h K, ita est h K ad d e. fiat ut h k ad d e, ita d e ad aliam lineam, in qua sit m. erit ex æquali ut a b ad d e, ita h k ad m. Et quoniam triangula a b c, h K l, d e f similia sunt; triangulũ a b c ad triangulum h K l est, ut linea a b ad lineam d e: triangulũ autem h K l ad ipsum d e f est, ut h k ad m. ergo triangulum a b c ad triangulum h k l eandem proportionem habet, quam triangulum h K l ad ipsum d e f. Eodem modo in aliis frustis pyramidis idem demonstrabitur.



16. undecimi

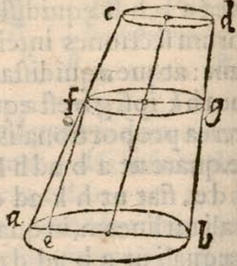
34. primi

9. huius corol.
20. sexti

11. quinti

Sit frustum coni, uel coni portionis a d: & secetur plano per axem, cuius sectio sit a b c d, ita ut maior ipsius basis sit circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa c d. Rursus inter lineas a b, c d inueniatur proportionalis b e: & ab e ducta e f æquidistante b d, quæ lineam c a in f secet, per f planum basibus æquidistans ducatur, ut sit sectio circulus, uel ellipsis circa diametrum f g. Dico sectionem a b ad sectionem f g eandem proportionem habere, quam f g ad ipsam c d. Simili enim ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum a b ad quadratum f g ita esse, ut quadratū f g ad c d quadratum. Sed circuli inter se eandem proportionem habent, quam diametrorum quadrata. ellipses autem circa a b, f g, c d, quæ similes sunt, ut ostendimus in cōmentariis in principium libri Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus, eam habēt proportionem, quam quadrata diametrorum, quæ eiusdem rationis sunt, ex corollaio septimæ propositionis eiusdem libri. ellipses enim nunc appello ipsa spacia ellipsibus contenta. ergo circulus, uel ellipsis a b ad circulū, uel ellipsim f g eam proportionem habet, quam circulus, uel ellipsis f g ad circulum uel ellipsim c d. quod quidem faciendum proposuimus.

2. duodecimi

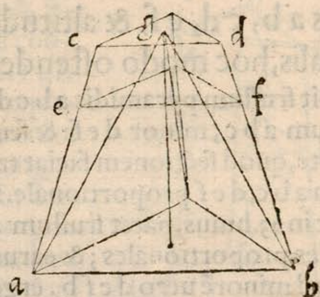


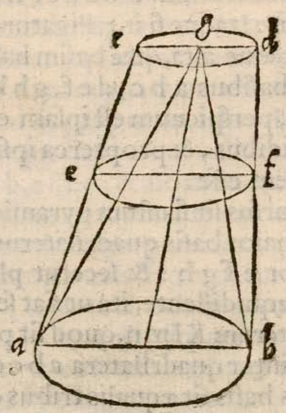
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXV.

QVODLIBET frustum pyramidis, uel coni, uel coni portionis ad pyramidem, uel conum, uel coni portionem, cuius basis eadem est, & æqualis altitudo, eandem proportionē habet, quam utræque bases, maior, & minor simul sumptæ vnà cū ea, quæ inter ipsas sit proportionalis, ad basim maiorem.

Sit

SIT frustũ pyramidis, uel coni, uel coni portionis a d, cuius maior basis a b, minor c d. & secetur altero plano basi æquidistante, ita ut sectio e f sit proportionalis inter bases a b, c d. constituatur autẽ pyramis, uel conus, uel coni portio a g b, cuius basis sit eadem, quæ basis maior frusti, & altitudo æqualis. Dico frustum a d ad pyramidem, uel conum, uel coni portionem a g b eandem proportionẽ habere, quã utræque bases, a b, c d unà cum e f ad basim a b. est enim frustum a d æquale pyramidi, uel cono, uel coni portioni, cuius basis ex tribus basibus a b, e f, c d constat; & altitudo ipsius altitudini est æqualis: quod mox ostendemus. Sed pyramides, coni, uel coni portiões, quæ sunt æquali altitudine, eãdem inter se, quam bases, proportionem habent, sicuti demonstratum est, partim ab Euclide in duodecimo libro elementorum, partim à nobis in cõmentariis in undecimam propositionẽ Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus. quare pyramis, uel conus, uel coni portio, cuius basis est tribus illis basibus æqualis ad a g b eam habet proportionem, quam bases a b, e f, c d ad a b basim. Frustum igitur a d ad a g b



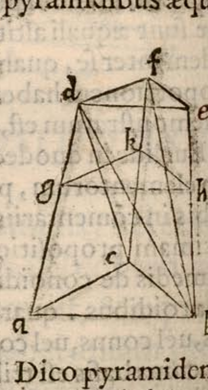


6. 11. duodecimi

pyramidem, uel conum, uel coni portionem eandem proportionem habet, quam bases a b, c d unà cum e f ad basim a b. quod demonstrare uolebamus.

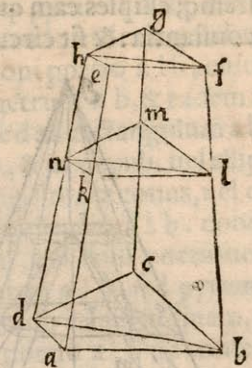
Frustum uero a d æquale esse pyramidi, uel cono, uel coni portioni, cuius basis constat ex basibus a b, c d, e f, & altitudo frusti altitudini eꝰ æqualis, hoc modo ostendemus.

Sit frustum pyramidis a b c d e f, cuius maior basis triangulum a b c; minor d e f: & secetur plano basibus æquidistante, quod sectionem faciat triangulum g h k inter triangula a b c, d e f proportionale. Iam ex iis, quæ demonstrata sunt in 23. huius, patet frustum a b c d e f diuidi in tres pyramides proportionales; & earum maiorem esse pyramidẽ a b c d minorẽ uero d e f b. ergo pyramis à triangulo g h k constituta, quæ altitudinem habeat frusti altitudini æqualem, proportionalis est inter pyramides a b c d, d e f b: & idcirco frustum a b c d e f tribus dictis pyramidibus æquale erit. Itaque si intelligatur alia pyramis æque alta, quæ basim habeat ex tribus basibus a b c, d e f, g h k constantem; perspicuum est ipsam eisdem pyramidibus, & propterea ipsi frusto æqualem esse.



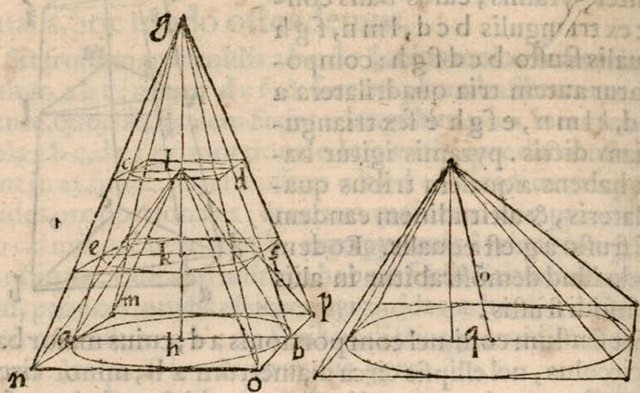
Rursus sit frustum pyramidis a g, cuius maior basis quadrilaterum a b c d, minor e f g h: & secetur plano basibus æquidistante, ita ut fiat sectio quadrilaterum K l m n, quod sit proportionale inter quadrilatera a b c d, e f g h. Dico pyramidem, cuius basis sit æqualis tribus quadrilateris a b c d, k l m n, e f g h, & altitudo æqualis altitudini frusti, ipsi frusto a g æqualem esse. Ducatur enim planum per lineas f b, h d, quod

quod diuidat frustum, in duo frusta triangulares bases habentia, uidelicet in frustum a b d e f h, & in frustū b c d f g h. erit triangulum k l n proportionale inter triangula a b d, e f h: & triangulum l m n proportionale inter b c d, f g h. sed pyramis æque alta, cuius basis constat ex tribus triangulis a b d, k l n, e f h, demonstrata ... frusto a b d e f h æqualis: & similiter pyramis, cuius basis constat ex triangulis b c d, l m n, f g h æqualis frusto b c d f g h: componuntur autem tria quadrilatera a b c d, k l m n, e f g h è sex triangulis iam dictis. pyramis igitur basim habens æqualem tribus quadrilateris, & altitudinem eandem ipsi frusto a g est æqualis. Eodem modo illud demōstrabitur in aliis eiusmodi frustis.



Sit frustum coni, uel coni portionis a d; cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa c d: & secetur plano, quod basibus æquidistet, faciatq; sectionem circulum, uel ellipsim circa diametrum e f, ita ut inter circulos, uel ellipses a b, c d sit proportionalis. Dico conum, uel coni portionem, cuius basis est æqualis tribus circulis, uel tribus ellipsibus a b, e f, c d; & altitudo eadem, quæ frusti a d, ipsi frusto æqualem esse. producatur enim frusti superficies quousque coeat in unum punctum, quod sit g: & coni, uel coni portionis a g b axis sit g h, occurrens planis a b, e f, c d in punctis h k l: circa circulum uero describatur quadratum m n o p, & circa ellipsim rectangulū m n o p, quod ex ipsius diametris constat: iunctisq; g m, g n, g o, g p, ex eodem uertice intelligatur pyramis basim habens dictum quadratum, uel rectangulum: & plana in quibus sunt circuli, uel ellipses e f, c d usque ad eius latera

producantur. Quoniam igitur pyramis ſecatur planis baſi
9. huius æquidiſtantibus, ſectiones ſimiles erunt: atque erunt quadrata, uel rectangula circa circulos, uel ellipſes deſcripta, quemadmodum & in ipſa baſi. Sed cum circuli inter ſe eã
2. duodecimi. proportionem habeant, quam diametrorum quadrata: itemq; ellipſes eam quam rectangula ex ipſarum diametris
7. de conoidibus & ſphæroidibus conſtantia: & ſit circulus, uel ellipſis circa diametrum e f



proportionalis inter circulos, uel ellipſes a b, c d; erit rectangulum e f etiam inter rectangula a b, c d proportionale: per rectangulum enim nunc breuitatis cauſa etiã ipſum quadratum intelligemus. quare ex iis, quæ proxime dicta ſunt, pyramis baſim habens æqualem dictis rectangulis, & altitudinem eandem, quam fruſtum a d, ipſi fruſto à pyramide abſciſſo æqualis probabitur. ut autem rectangulum c d ad rectangulũ e f, ita circulus, uel ellipſis c d ad e f circulum, uel ellipſim: componendoq; ut rectangula c d, e f, ad e f rectangulum, ita circuli, uel ellipſes e d, e f, ad e f: & ut rectangulum e f ad rectangulum a b, ita circulus, uel ellipſis e f ad a b circulum, uel ellipſim. ergo ex æquali, & componendo, ut rectãgula c d, e f, a b ad ipſum a b, ita circuli,

culi, uel ellipses c d, e f a b ad circulum, uel ellipsim a b. Intelligatur pyramis q basim habens æqualem tribus rectangulis a b, e f, c d; & altitudinem eãdem, quam frustum a d. intelligatur etiam conus, uel coni portio q, eadem altitudine cuius basis sit tribus circulis, uel tribus ellipsibus a b, e f, c d æqualis. postremo intelligatur pyramis a l b, cuius basis sit rectangulum m n o p, & altitudo eadem, quæ frusti: item q, intelligatur conus, uel coni portio a l b, cuius basis circulus, uel ellipsis circa diametrum a b, & eadem altitudo. ut igitur rectangula a b, e f, c d ad rectangulum a b, ita pyramis q ad pyramidem a l b; & ut circuli, uel ellipses a b, e f, c d ad a b circulum, uel ellipsim, ita conus, uel coni portio q ad conum, uel coni portionem a l b. conus igitur, uel coni portio q ad conum, uel coni portionem a l b est, ut pyramis q ad pyramidem a l b. sed pyramis a l b ad pyramidem a g b est, ut altitudo ad altitudinem, ex 20. huius: & ita est conus, uel coni portio a l b ad conum, uel coni portionem a g b ex 14. duodecimi elementorum, & ex iis, quæ nos demonstrauimus in commentariis in undecimam de conoidibus, & sphæroidibus, propositione quarta. pyramis autem a g b ad pyramidem c g d proportionem habet compositam ex proportione basium & proportione altitudinum, ex uigesima prima huius: & similiter conus, uel coni portio a g b ad conum, uel coni portionem c g d proportionem habet compositã ex eisdem proportionibus, per ea, quæ in dictis commentariis demonstrauimus, propositione quinta, & sexta: altitudo enim in utrisque eadem est, & bases inter se se eandem habent proportionem. ergo ut pyramis a g b ad pyramidem c g d, ita est conus, uel coni portio a g b ad a g d conum, uel coni portionem: & per conuersionẽ rationis, ut pyramis a g b ad frustũ à pyramide abscissum, ita conus uel coni portio a g b ad frustum a d. ex æquali igitur, ut pyramis q ad frustum à pyramide abscissum, ita conus uel coni portio q ad

6. 11. duodecimi

frustum a d. Sed pyramis q æqualis est frusto à pyramide abscisso, ut demonstrauimus. ergo & conus, uel coni portio q, cuius basis ex tribus circulis, uel ellipsibus a b, e f, c d constat, & altitudo eadem, quæ frusti: ipsi frusto a d est æqualis. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXVI.

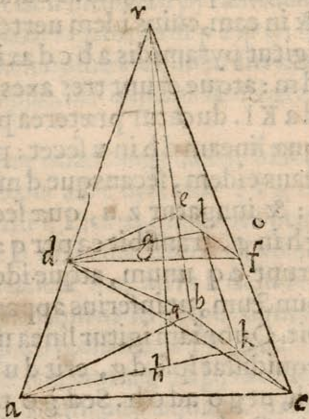
Cvivslibet frusti à pyramide, uel cono, uel coni portione abscisi, centrum grauitatis est in axe, ita ut eo primum in duas portiones diuiso, portio superior, quæ minorem basim attingit ad portionem reliquam eam habeat proportionem, quam duplum lateris, uel diametri maioris basis, unà cum latere, uel diametro minoris, ipsi respondente, habet ad duplum lateris, uel diametri minoris basis unà cũ latere, uel diametro maioris: deinde à puncto diuisionis quarta parte superioris portionis in ipsa sumpta: & rursus ab inferioris portionis termino, qui est ad basim maiorem, sumpta quarta parte totius axis: centrum sit in linea, quæ his finibus continetur, atque in eo lineæ puncto, quo sic diuiditur, ut tota linea ad partem propinquiorem minori basi, eãdem proportionem habeat, quam frustum ad pyramidẽ, uel conum, uel coni portionem, cuius basis sit eadem, quæ basis maior, & altitudo frusti altitudini æqualis.

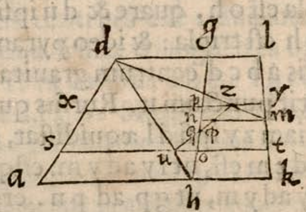
sit

Sit frustum a e a pyramide, quæ triangularem basim habeat abscissum: cuius maior basis triangulum a b c, minor d e f; & axis g h. ducto autem plano per axem & per lineã d a, quod sectionem faciat d a k l quadrilaterum; puncta k l lineas b c, e f bifariam secabunt. nam cum g h sit axis frusti: erit h centrum grauitatis trianguli a b c: & g centrum trianguli d e f: centrum uero cuiuslibet trianguli est in recta linea, quæ ab angulo ipsius ad dimidiã basim ducitur ex decimatertia primi libri Archimedis de cētro grauitatis planorum. quare centrũ grauitatis trapezii b c f e est in linea k l, quod sit m: & à puncto m ad axem ducta m n ipsi a k, uel d l æquidistante; erit axis g h diuisus in portiones g n, n h, quas diximus: eandem enim proportionem habet g n ad n h, quã l m ad m k. At l m ad m k habet eam, quã duplum lateris maioris basis b c unà cum latere minoris e f ad duplum lateris e f unà cum latere b c, ex ultima eiusdem libri Archimedis. Itaque à linea n g abscindatur, quarta pars, quæ sit n p: & ab axe h g abscindatur itidem quarta pars h o: & quam proportionem habet frustum ad pyramidem, cuius maior basis est triangulum a b c, & altitudo ipsi æqualis; habeat o p ad p q. Dico centrum grauitatis frusti esse in linea p o, & in puncto q. namque ipsum esse in linea g h manifeste constat. protractis enim frusti pla

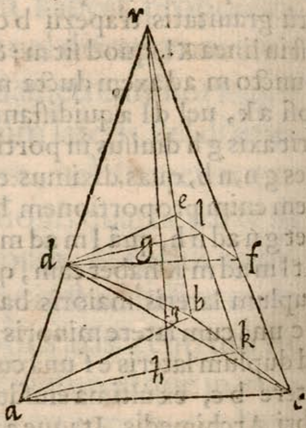
3. diffi. huius.

Vltima eiusdē libri Archimedis.

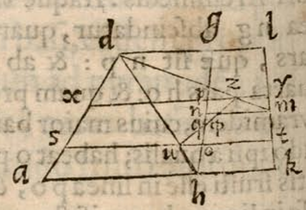




nis, quousque in unum punctum r conueniant; erit pyramidis a b c r, & pyramidis d e f r grauitatis centrum in linea r h. ergo & reliquæ magnitudinis, uidelicet frusti centrum in eadem linea necessario comperietur. Iungantur d b, d c, d h, d m: & per lineas d b, d c ducto altero plano intelligatur frustum in duas pyramides diuisum: in pyramidem quidem, cuius basis est triangulum a b c, uertex d: & in eam, cuius idem uertex, & basis trapezium b c f e. erit igitur pyramidis a b c d axis d h, & pyramidis b c f e d axis d m: atque erunt tres axes g h, d h, d m in eodem plano d a K l. ducatur præterea per o linea s t ipsi a K æquidistãs, quæ lineam d h in u secet: per p uero ducatur x y æquidistans eidem, secansque d m in z: & iungatur z u, quæ secet g h in φ. transibit ea per q: & erunt φ q unum, atque idem punctum; ut inferius apparebit. Quoniam igitur linea u o



2. sexti. æquidistat ipsi d g, erit d u ad u h, ut g o ad o h. Sed g o tripla est o h. quare & d u ipsius u h est tripla: & ideo pyramidis a b c d centrum grauitatis erit punctum u. Rursus quoniam z y ipsi d l æquidistat, d z ad z m est, ut l y ad y m: estque l y ad y m, ut g p ad p n. ergo d z ad z m est, ut g p ad p n. Quòd cum g p sit tripla p n; erit etiam d z ipsius z m tripla. atque ob eandem caussam punctum z est centrũ grauitatis pyramidis b c f e d. iuncta igitur z u, in ea erit cẽtrum



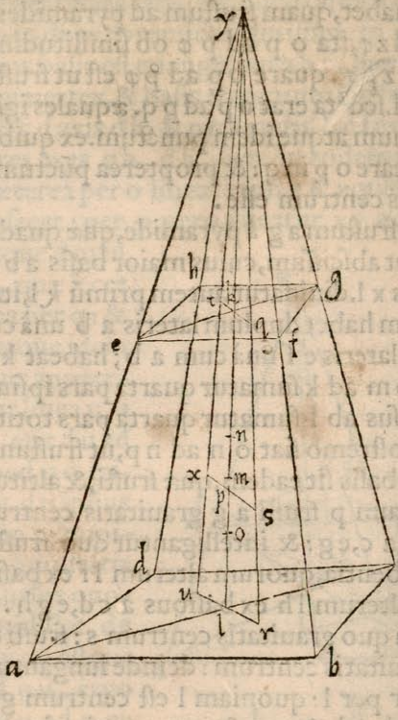
grarauitatis magnitudinis, quæ ex utriſque pyramidibus cō ſtat; hoc eſt ipſius fruſti. Sed fruſti centrum eſt etiam in axe g h. ergo in puncto φ, in quo lineæ z u, g h conueniunt. Itaque u φ ad φ z eam proportionem habet, quam pyramis b c f e d ad pyramidem a b c d. & componendo u z ad z φ eam habet, quam fruſtum ad pyramidem a b c d. Vt uero u z ad z φ, ita o p ad p φ ob ſimilitudinem triangulorum, u o φ, z p φ. quare o p ad p φ eſt ut fruſtum ad pyramidem a b c d. ſed ita erat o p ad p q. æquales igitur ſunt p φ, p q: & q φ unum atque idem punctum. ex quibus ſequitur lineam z u ſecare o p in q: & propterea pūctum q ipſius fruſti grauitatis centrum eſſe.

8. primi libri Archimedis de cētro grauitatis planorum

7. quinti.

Sit fruſtum a g à pyramide, quæ quadrangularem baſim habeat abſciſſum, cuius maior baſis a b c d, minor e f g h, & axis k l. diuidatur autem primū k l, ita ut quam proportionem habet duplum lateris a b unà cum latere e f ad duplum lateris e f unà cum a b; habeat k m ad m l. deinde à pūcto m ad k ſumatur quarta pars ipſius m k, quæ ſit m n. & rurſus ab l ſumatur quarta pars totius axis l k, quæ ſit l o. poſtremo fiat o n ad n p, ut fruſtum a g ad pyramidē, cuius baſis ſit eadem, quæ fruſti, & altitudo æqualis. Dico punctum p fruſti a g grauitatis centrum eſſe. ducantur enim a c, e g: & intelligantur duo fruſta triangulares baſes habentia, quorum alterum l f ex baſibus a b c, e f g cō ſtet; alterum l h ex baſibus a c d, e g h. Sitq; fruſti l f axis q r; in quo grauitatis centrum s: fruſti uero l h axis t u, & x grauitatis centrum: deinde iungantur u r, t q, x s. tranſibit u r per l: quoniam l eſt centrum grauitatis quadranguli a b c d: & puncta r u grauitatis centra triangulorum a b c, a c d; in quæ quadrangulum ipſum diuiditur. eadem quoque ratione t q per punctum k tranſibit. At uero proportiones, ex quibus fruſtorum grauitatis centra inquirimus, eædem ſunt in toto fruſto a g, & in fruſtis l f, l h. Sunt enim per octauam huius quadrilatera a b c d, e f g h ſimilia:

itemq; ſimilia triangula a b c, e f g; & a c d, e g h. idcircoq; latera ſibi ipſis reſpondentia eandem inter ſe ſe proportionem ſeruant. Vt igitur duplum lateris a b unà cum latere e f ad duplum lateris e f unà cum a b, ita eſt duplum a d lateris unà cum latere e h ad duplum e h unà cum a d: & ita in aliis. Rurſus fruſtum a g ad pyramidẽ, cuius eadem eſt baſis, & æqualis altitudo eandem proportionẽ habet, quam fruſtũ l f ad pyramidẽ, quæ eſt eadẽ baſi, & æquali altitudine: & ſimiliter quam l h fruſtum ad pyramidem, quæ ex eadẽ baſi, & æquali altitudine conſtat. nam ſi inter ipſas baſes mediæ proportionales conſtituantur, tres baſes ſimul ſumptæ ad maiorem baſim in omnibus eodem modo ſe habebunt. Vnde fit, ut axes K l, q r, t u à punctis p s x in eandem proportionem ſecentur. ergo linea x s per p tranſibit: & lineæ r u, s x, q t inter ſe æquidiſtantes erunt. Itaque cum fruſti a g latera pro-



2. ſexti.

ducta

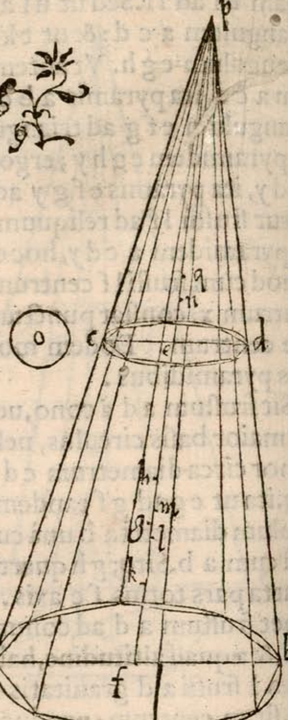
ducta fuerint, ita ut in unum punctum y coeant, erunt triã gala u y l, x y p, t y k inter se similia: & similia etiam triangula l y r, p y s, k y q. quare ut in 19 huius, demonstrabitur x p, ad p s: itemq; t k ad k q eandem habere proportionẽ, quam u l ad l r. Sed ut u l ad l r, ita est triangulum a b c ad triangulum a c d: & ut t k ad K q, ita triangulum e f g ad triangulum e g h. Vt autem triangulum a b c ad triangulum a c d ita pyramis a b c y ad pyramidem a c d y. & ut triangulum e f g ad triangulum e g h, ita pyramis e f g y ad pyramidem e g h y; ergo ut pyramis a b c y ad pyramidẽ a c d y, ita pyramis e f g y ad pyramidem e g h y. reliquum igitur frustũ l f ad reliquum frustũ l h est ut pyramis a b c y ad pyramidem a c d y, hoc est ut u l ad l r, & ut x p ad p s. Quòd cum frusti l f centrum grauitatis sit s: & frusti l h sit centrum x: constat punctum p totius frusti a g grauitatis esse centrum. Eodem modo fiet demonstratio etiam in aliis pyramidibus.

19. quinti

8. Archimedis.

Sit frustum a d à cono, uel coni portione abscissum, cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa diametrum c d: & axis e f. diuidatur autẽ e f in g, ita ut e g ad g f eandem proportionem habeat, quam duplum diametri a b unà cum diametro c d ad duplum c d unà cum a b. Sitq; g h quarta pars lineæ g e: & sit f K item quarta pars totius f e axis. Rursus quam proportionem habet frustum a d ad conum, uel coni portionem, in eadẽ basi, & æquali altitudine, habeat linea K h ad h l. Dico punctum l frusti a d grauitatis centrum esse. Si enim fieri potest, sit m centrum: producaturq; l m extra frustum in n: & ut n l ad l m, ita fiat circulus, uel ellipsis circa diametrũ a b ad aliud spacium, in quo sit o. Itaque in circulo, uel ellipsi circa diametrum a b rectilinea figura plane describatur, ita ut quæ relinquuntur portiones sint o spacio minores: & intelligatur pyramis a p b, basim habens rectilineam figuram in circulo, uel ellipsi a b descriptam: à qua frustum pyramidis sit abscissum. erit ex iis quæ proxime tradidimus, frusti pyramidis a d centrum grauitatis l. Quoniam igitur portiones spacio o minores sunt; habebit circulus, uel ellipsis a b ad portiones dictas maiorē proportionem, quàm n l ad l m. sed ut circulus, uel ellipsis a b ad portiones, ita a p b conus, uel coni portio ad solidas portiones, id quod supra demonstratum est: & ut circulus

22. huius uel ellipsis c d ad portiones, quæ ipsi insunt, ita conus, uel coni portio c p d ad solidas ipsius portiones. Quòd cum figuræ in circulis, uel ellipsibus a b c d descriptæ similes sint, erit proportio circuli, uel ellipsis a b ad suas portiones, eadē, quæ circuli uel ellipsis c d ad suas. ergo conus, uel coni portio a p b ad portiones solidas eādem habet proportionē, quam conus, uel coni portio c p d ad solidas ipsius



19. quinti portiones. reliquum igitur coni, uel coni portionis frustū, scilicet a d ad reliquas portiones solidas in ipso contentas eandem proportionē habet, quam conus, uel coni portio a p b ad solidas portiones: hoc est eandem, quam circulus, uel ellipsis a b ad portiones planas. quare frustum coni, uel coni portionis a d

ad

ad portiones solidas maiorem habet proportionẽ, quàm n l ad l m: & diuidendo frustum pyramidis ad dictas portiones maiorem proportionem habet, quàm n m ad m l. fiat igitur ut frustum pyramidis ad portiones, ita q m ad m l. Itaque quoniam à frusto coni, uel coni portionis a d, cuius grauitatis centrum est m, aufertur frustum pyramidis habens centrum l; erit reliquæ magnitudinis, quæ ex portionibus solidis constat; grauitatis cẽtrum in linea l m producta, atque in puncto q, extra figuram posito. quod fieri nullo modo potest. relinquitur ergo, ut punctum l sit frusti a d grauitatis centrum. quæ omnia demonstranda proponebantur.

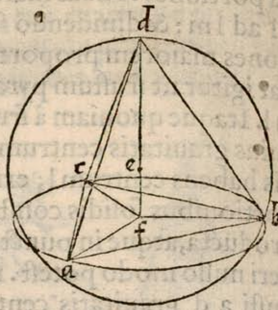
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXVII.

OMNIVM solidorum in sphæra descriptorum, quæ æqualibus, & similibus basibus contineantur, centrum grauitatis est idem, quod sphæræ centrum.

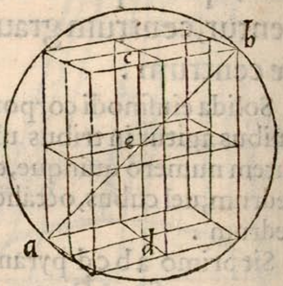
Solida eiusmodi corpora regularia appellare solent, de quibus agitur in tribus ultimis libris elementorum: sunt autem numero quinque, tetrahedrum, uel pyramis, hexahedrum, uel cubus, octahedrum, dodecahedrum, & icosahedrum.

Sit primo a b c d pyramis ĩ sphæra descripta, cuius sphæræ centrum sit e. Dico e pyramidis a b c d grauitatis esse centrum. Si enim iuncta d e producatur ad basim a b c in f; ex iis, quæ demonstrauit Campanus in quartodecimo libro elementorum, propositione decima quinta, & decima septima, erit f centrum circuli circa triangulum a b c descripti: atque erit e f sexta pars ipsius sphæræ axis. quare ex prima huius constat trianguli a b c grauitatis centrum esse punctum f: & idcirco lineam d f esse pyramidis axem.

At cum e f sit sexta pars axis sphæræ, erit d e tripla e f. ergo punctum e est grauitatis centrum ipsius pyramidis: quod in uigesima secunda huius demonstratum fuit. Sed e est centrum sphæræ. Sequitur igitur, ut centrum grauitatis pyramidis in sphæra descriptæ idem sit, quod ipsius sphæræ centrum.



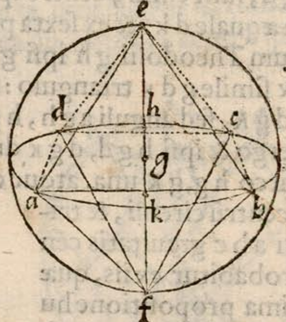
Sit cubus in sphæra descriptus a b, & oppositorum planorum lateribus bifariam diuisis, per puncta diuisionum plana ducantur, ut communis ipsorum sectio sit recta linea c d. Itaque si ducatur a b, solidi scilicet diameter, lineæ a b, c d ex trigesimanona undecimi sese bifariam secabunt. secent autem in puncto e. erit e centrũ grauitatis solidi a b, id quod demonstratum est in octaua huius. Sed quoniam ab est sphæræ diametro æqualis, ut in decima quinta propositione tertii decimi libri elemẽtorum ostenditur: punctum e sphæræ quoque centrum erit. Cubi igitur in sphæra descripti grauitatis centrum idem est, quod centrum ipsius sphæræ.



Sit octahedrum a b c d e f, in sphæra descriptum, cuius sphæræ centrum sit g. Dico punctum g ipsius octahedri grauitatis centrum esse. Constat enim ex iis, quæ demonstrata sunt à Campano in quinto decimo libro elementorum, propositione sextadecima eiusmodi solidum diuidi in duas pyramides æquales, & similes; uidelicet in pyramidem,

dem,

dem, cuius basis est quadratum a b c d, & altitudo e g: & in pyramidem, cuius eadē basis, altitudoq; f g; ut sint e g, g f, semidiametri sphæræ, & linea una. Cū igitur g sit sphæræ centrum, erit etiam centrum circuli, qui circa quadratū a b c d describitur: & propterea eiusdem quadrati grauitatis centrum: quod in prima propositione huius demonstratum est. quare pyramidis a b c d e axis erit e g: & pyramidis a b c d f axis f g. Itaque sit h centrum grauitatis pyramidis a b c d e, & pyramidis a b c d f centrum sit K: perspicuum est ex uigesima secunda propositione huius, lineā e h triplam esse h g: cō ponendoq; e g ipsius g h quadruplam. & eadē ratione f g quadruplā ipsius g K. quod cum e g, g f sint æquales, & h g, g K necessario æquales erunt. ergo ex quarta propositione primi libri Archimedis de cētro grauitatis planorū, totius octahedri, quod ex dictis pyramidibus constat, centrum grauitatis erit punctum g idem, quod ipsius sphæræ centrum.



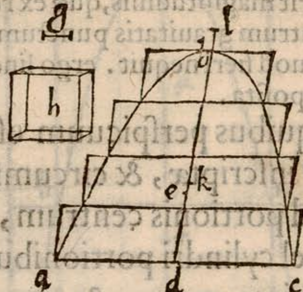
Sit icosahedrum a d descriptum in sphæra, cuius centrū sit g. Dico g ipsius icosahedri grauitatis esse centrum. Si enim ab angulo a per g ducatur recta linea usque ad sphæræ superficiem; constat ex sexta decima propositione libri tertii decimi elementorum, cadere eam in angulum ipsi a oppositum. cadat in d: sitq; una aliqua basis icosahedri triangulum a b c: & iunctæ b g, c g producantur, & cadant in angulos e f, ipsis b c oppositos. Itaque per triangula a b c, d e f ducantur plana sphæram secantia. erunt hæ se-grauitatis esse punctum m. patet igitur totius dodecahedri, centrum grauitatis idẽ esse, quod & sphæræ ipsum comprehendentis centrum. quæ quidem omnia demonstrasse oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXVIII.

DATA qualibet portione conoidis rectanguli, abscissa plano ad axem recto, uel non recto; fieri potest, ut portio solida inscribatur, uel circumscribatur ex cylindris, uel cylindri portionibus, æqualem habentibus altitudinem, ita ut recta linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & figuræ inscriptæ, uel circumscriptæ interiicitur, sit minor qualibet recta linea proposita.

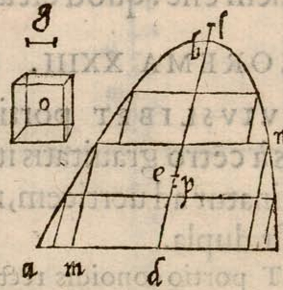
Sit portio conoidis rectanguli a b c, cuius axis b d, grauitatisq; centrum e: & sit g recta linea proposita. quam uero proportionem habet linea b e ad lineam g, eandem habeat portio conoidis ad solidum h: & circumscribatur portioni figura, sicuti dictum est, ita ut portiones reliquæ sint solido h minores: cuius quidem figuræ centrum grauitatis sit punctum K. Dico lineã k e minorem esse linea g proposita. nisi enim sit minor, uel æqualis, uel maior erit. & quoniam figura circumscripta ad reliquas portiones maiorem
8.quinti. proportionem habet, quàm portio conoidis ad solidum h; hoc est maiorem, quàm b e ad g: & b e ad g non minorem habet proportionem, quàm ad k e, propterea quod k e non ponitur minor ipsa g: habebit figura circumscripta ad portiones reliquas maiorem proportionem quàm b e ad e k:
29.quinti ex traditione Campani. & diuidendo portio conoidis ad reliquas portiones habebit maiorem, quàm b K ad K e. quare si fiat ut portio conoidis

noidis ad portiones reliquas, ita alia linea; quæ sit l k ad k e: erit l k maior, quam b k: & ideo punctum l extra portionem cadet. Quoniã igitur à figura circumscripta, cuius grauitatis centrum est k, aufertur portio conoidis, cuius centrum e. habetq; l K ad K e eam proportionem, quam portio conoidis ad reliquas portiones; erit punctum l extra portionem cadẽs, centrum magnitudinis



ex reliquis portionibus compositæ. illud autem fieri nullo modo potest. quare constat lineam k e ipsa g linea proposita minorem esse.

Rursus inscribatur portioni figura, uidelicet cylindrus m n, ut sit ipsius altitudo æqualis dimidio axis b d: & quam proportionem habet b e ad g, habeat m n cylindrus ad solidum o. inscribatur deinde eidem alia figura, ita ut portiones reliquæ sint solido o minores: & centrum grauitatis figuræ sit p. Dico lineam p e ipsa g minorẽ esse. si enim non sit mi-



nor, eodem, quo supra modo demonstrabimus figuram inscriptam ad reliquas portiones maiorem proportionem habere, quàm b e ad e p. & si fiat alia linea l e ad e p, ut est figura inscripta ad reliquas portiones, pũctum l extra por tionem cadet: Itaque cum à portione conoidis, cuius grauitatis centrum e auferatur inscripta figura, centrum habens p: & sit l e ad e p, ut figura inscripta ad portiones reliquas: erit magnitudinis, quæ ex reliquis portionibus constat, centrum grauitatis punctum l, extra portionem cadens. quod fieri nequit. ergo linea p e minor est ipsa g linea proposita.

Ex quibus perspicuum est centrum grauitatis figuræ inscriptæ, & circumscriptæ eo magis accedere ad portionis centrum, quo pluribus cylindris, uel cylindri portionibus constet: fiatq; figura inscripta maior, & circumscripta minor. & quanquam continenter ad portionis centrũ propius admoueatur: nunquam tamen ad ipsum perueniet. sequeretur enim figuram inscriptam, nõ solum portioni, sed etiam circumscriptæ figuræ æqualem esse. quod est absurdum.

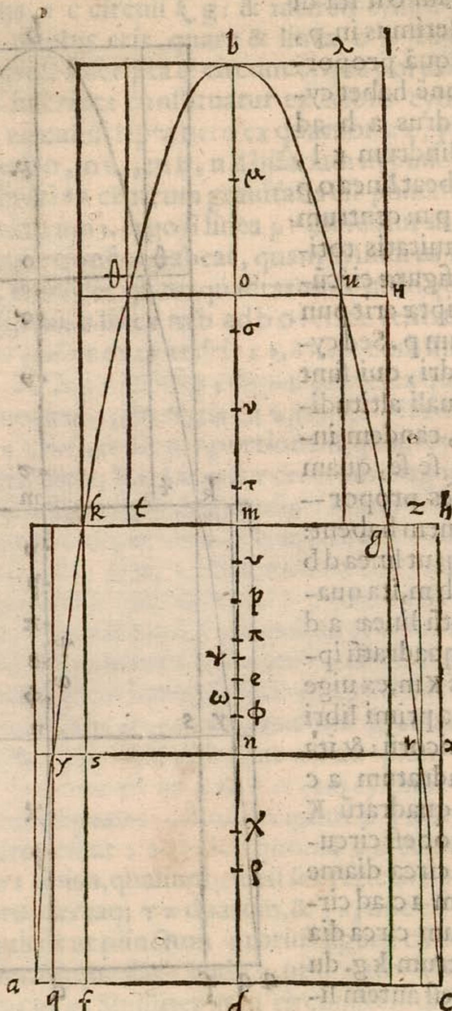
THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIX.

CVIVSLIBET portionis conoidis rectanguli axis à cẽtro grauitatis ita diuiditur, ut pars quæ terminatur ad uerticem, reliquæ partis, quæ ad basim sit dupla.

SIT portio conoidis rectanguli uel abscissa plano ad axem recto, uel non recto: & secta ipsa altero plano per axẽ sit superficiei sectio a b c rectanguli coni sectio, uel parabole; plani abscindentis portionem sectio sit recta linea a c: axis portionis, & sectionis diameter b d. Sumatur autem in linea b d punctum e, ita ut b e sit ipsius e d dupla. Dico e por-

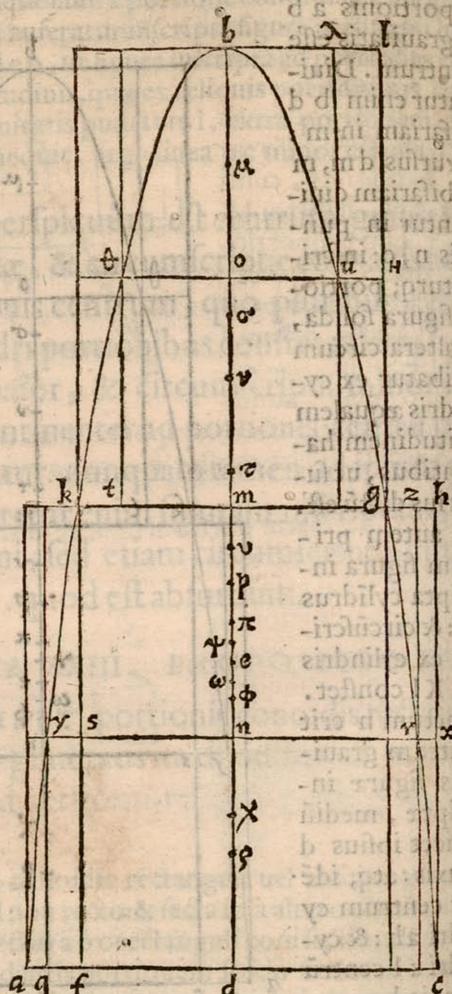
155

e portionis a b c grauitatis esse centrum. Diuidatur enim b d bifariam in m: & rursus d m, m b bifariam diuidantur in punctis n, o: inscribaturq; portioni figura solida, & altera circum scribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ut superius dictũ est. Sit autem primum figura inscripta cylĩdrus f g: & circũscripta ex cylindris a h, K l constet. punctum n erit centrum grauitatis figuræ inscriptæ, mediũ scilicet ipsius d m axis: atq; idẽ erit centrum cylindri a h: & cylindri κ l centrũ o, axis b m medium. quare si li



7.huius

neam o n ita di uiserimus in p, ut quã proportionẽ habet cylindrus a h ad cylindrum κ l, habeat linea o p
8. primi libri Archimedis ad p n: centrum grauitatis totius figuræ circũscriptæ erit pun
11. duodecimi. ctum p. Sed cylindri, qui sunt æquali altitudine, eandem inter se se, quam bases proportionem habent: estq; ut linea d b ad b m, ita quadratũ lineæ a d ad quadratũ ipsius κ m, ex uigesima primi libri
15. quinti conicorũ: & ita quadratum a c ad quadratũ κ
2. duodecimi. g: hoc est circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k g. dupla est autem linea d b lineæ



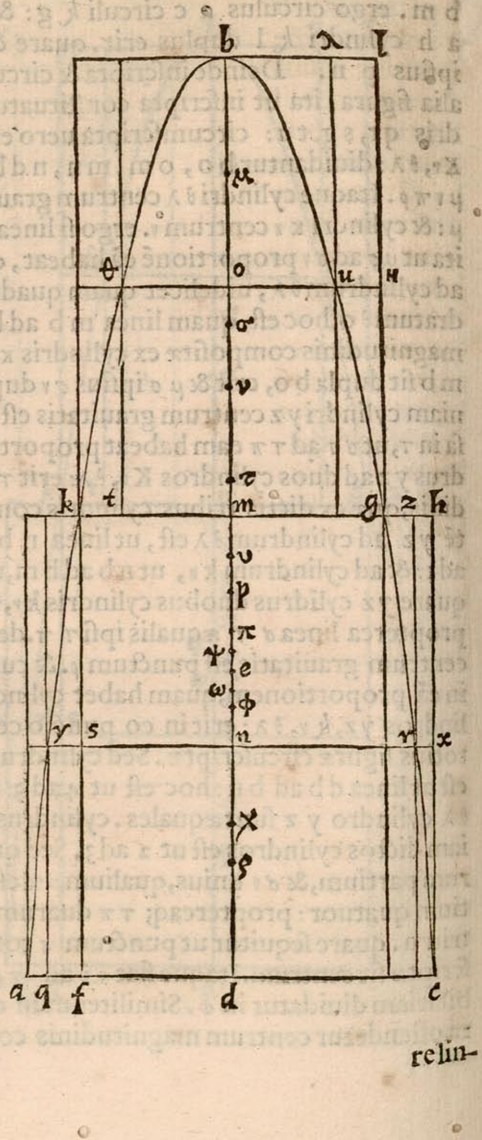
b m.

156

b m. ergo circulus a c circuli k g: & idcirco cylindrus a h cylindri k l duplus erit. quare & linea σ p dupla ipſius p n. Deinde inſcripta & circumſcripta portioni alia figura, ita ut inſcripta conſtituatur ex tribus cylindris q r, s g, t u: circumſcripta uero ex quatuor a x, y z, κ ν, θ λ: diuidantur b o, o m, m n, n d bifariam in punctis μ ν π ρ. Itaque cylindri θ λ centrum grauitatis eſt punctum μ: & cylindri κ ν centrum ν. ergo ſi linea μ ν diuidatur in σ, ita ut μ σ ad σ ν proportionē eā habeat, quam cylindrus κ ν ad cylindrum θ λ, uidelicet quam quadratum κ m ad quadratum θ o, hoc eſt, quam linea m b ad b o: erit σ centrum magnitudinis compoſitæ ex cylindris κ ν, θ λ. & cum linea m b ſit dupla b o, erit & μ σ ipſius σ ν dupla. præterea quoniam cylindri y z centrum grauitatis eſt π, linea σ π ita diuiſa in τ, ut σ τ ad τ π eam habeat proportionem, quam cylindrus y z ad duos cylindros κ ν, θ λ: erit τ centrum magnitudinis, quæ ex dictis tribus cylindris conſtat. cylindrus autē y z ad cylindrum θ λ eſt, ut linea n b ad b o, hoc eſt ut 3 ad 1: & ad cylindrum κ ν, ut n b ad b m, uidelicet ut 3 ad 2. quare y z cylīdrus duobus cylindris κ ν, θ λ æqualis erit. & propterea linea σ τ æqualis ipſi τ π. denique cylindri a x centrum grauitatis eſt punctum ρ. & cum τ ρ diuiſa fuerit in eā proportionem, quam habet cylindrus a x ad tres cylindros y z, κ ν, θ λ: erit in eo puncto centrum grauitatis totius figuræ circūſcriptæ. Sed cylindrus a x ad ipſum y z eſt ut linea d b ad b n: hoc eſt ut 4 ad 3: & duo cylindri κ ν θ λ cylindro y z ſunt æquales. cylindrus igitur a x ad tres iam dictos cylindros eſt ut 2 ad 3. Sed quoniā μ σ eſt duarum partium, & σ ν unius, qualium μ π eſt ſex; erit σ π partium quatuor: proptereaq; τ π duarum, & ν π, hoc eſt π ρ trium. quare ſequitur ut punctum π totius figuræ circumſcriptæ ſit centrum. Itaque fiat ν υ ad υ π, ut μ σ ad σ ν. & υ ρ bifariam diuidatur in φ. Similiter ut in circumſcripta figura oſtendetur centrum magnitudinis compoſitæ ex cylin-

20. primi conicorū

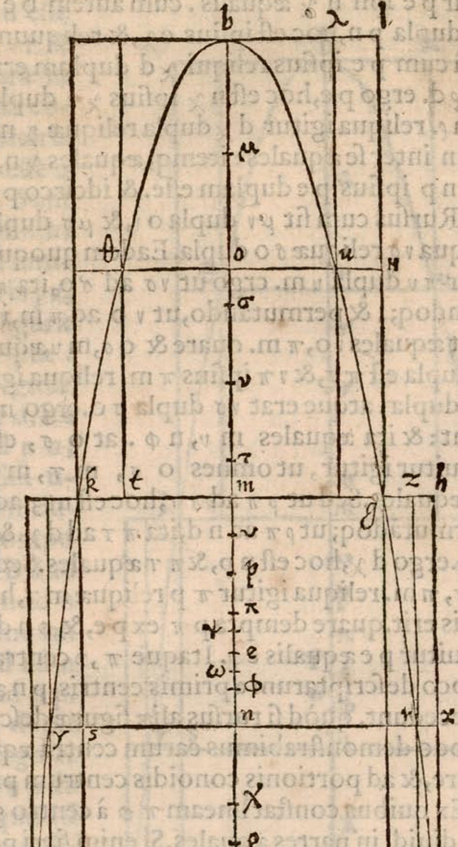
dris s g, t u esse punctum υ: & totius figuræ inscriptæ, quæ cõstat ex cylindris q r, ſ g, t u esse φ centrum. Sunt enim hi cylindri æquales & similes cylindris y z, K ν, θ λ, figuræ circumſcriptæ. Quoniã igitur ut b e ad e d, ita est o p ad p n; utraq; enim utriuſque est dupla: erit componendo, ut b d ad d e, ita o n ad n p; & permutando, ut b d ad o n, ita d e ad n p. Sed b d dupla est o n. ergo & e d ipſius n p dupla erit. quòd si e d bifariam diuidatur ĩ χ, erit χ d, uel e χ æqualis n p: & ſublata e n, quæ est cõmunis utrique e χ, p n,



relin-

157

relinquetur p e ipſi n χ æqualis. cum autem b e ſit dupla e d, & o p dupla p n, hoc eſt ipſius e χ, & reliquum, uideli- 19 quinti cet b o unà cum p e ipſius reliqui χ d duplum erit. eſtque b o dupla ρ d. ergo p e, hoc eſt n χ ipſius χ ρ dupla. ſed d n dupla eſt n ρ. reliqua igitur d χ dupla reliquæ χ n. ſunt autem d χ, p n inter ſe æquales: itemq; æquales χ n, p e. quare conſtat n p ipſius p e duplam eſſe. & idcirco p e ipſi e n æqualem. Rurſus cum ſit μ υ dupla o υ, & μ σ dupla σ υ; erit etiam reliqua υ σ reliquæ σ o dupla. Eadem quoque ratione cõcludetur π υ dupla υ m. ergo ut υ σ ad σ o, ita π υ ad υ m: componendoq;, & permutando, ut υ o ad π m, ita o σ ad m υ: & ſunt æquales υ o, π m. quare & o σ, m υ æquales. præterea σ π dupla eſt π τ, & υ π ipſius π m. reliqua igitur σ υ reliquæ m τ dupla. atque erat υ σ dupla σ o. ergo m τ, σ o æquales ſunt: & ita æquales m υ, n φ. at o σ, eſt æqualis m υ. Sequitur igitur, ut omnes o σ, m τ, m υ, n φ inter ſe ſint æquales. Sed ut ρ π ad π τ, hoc eſt ut 3 ad 2, ita n d ad d χ: permutãdoq; ut ρ π ad n d, ita π τ ad d χ. & ſũt æquales ρ π, n d. ergo d χ, hoc eſt n p, & π τ æquales. Sed etiam æquales n π, π m. reliqua igitur π p reliquæ m τ, hoc eſt ipſi n φ æqualis erit. quare dempta p π ex p e, & φ n dempta ex n e, relinquitur p e æqualis e φ. Itaque π, φ centra figurarũ ſecundo loco deſcriptarum a primis centris p n æquali interuallo recedunt. quòd ſi rurſus aliæ figuræ deſcribantur, eodem modo demonſtrabimus earum centra æqualiter ab his recedere, & ad portionis conoidis centrum propius ad moueri. Ex quibus conſtat lineam π φ à centro grauitatis portionis diuidi in partes æquales. Si enim fieri poteſt, non ſit centrum in puncto e, quod eſt lineæ π φ medium: ſed in ψ: & ipſi π ψ æqualis fiat φ ω. Cum igitur in portione ſolida quædam figura inſcribi posſit, ita ut linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & inſcriptæ figuræ interiicitur, qualibet linea propoſita ſit minor, quod proxime demonſtrauimus: perueniet tandem φ centrum inſcriptæ figuræ


b
λ
l
μ
θ
o
u
σ
ν
τ
k
t
m
z
h
g
p
π
ψ
e
ω
φ
n
x
γ
s
χ
ρ
a
q
f
d
c

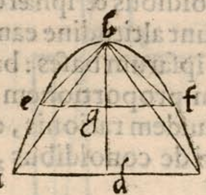
ad punctum ω. Sed quoniam π circumscripta itidem alia figura æquali interuallo ad portionis centrum accedit, ubi primum φ applicuerit se ad ω, & π ad punctũ ψ, hoc est ad portionis centrum se applicabit. quod fieri nullo modo posse perspicuum est. non aliter idem absurdum sequetur, si ponamus centrum portionis recedere à medio ad partes ω; esset enim aliquando centrum figuræ inscriptæ idem quod portionis centrũ. ergo punctum e centrum erit grauitatis portionis a b c. quod demonstrare oportebat.

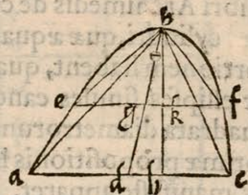
Quod autem supra demõstratum est in portione conoidis recta per figuras, quæ ex cylindris æqualem altitudinem habentibus constant, idem similiter demonstrabimus per figuras ex cylindri portionibus constantes in ea portione, quæ plano non ad axem recto abscinditur. ut enim tradidimus in commentariis in undecimam propositionem libri Archimedis de conoidibus & sphæroidibus. portiones cylindri, quæ æquali sunt altitudine eam inter se proportionem habent, quam ipsarum bases: bases autẽ quæ sunt ellipses similes eandem proportionem habere, quam quadrata diametrorum eiusdem rationis, ex corollario septimæ propositionis libri de conoidibus, & sphæroidibus, manifeste apparet. corol. 15 de conoidibus & sphæroidibus.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXX.

Si à portione conoidis rectanguli alia portio abscindatur, plano basi æquidistante; habebit portio tota ad eam, quæ abscissa est, duplam proportionem eius, quæ est basis maioris portionis ad basim minoris, uel quæ axis maioris ad axem minoris.

ABSCINDATVR à portione conoidis rectanguli a b c alia portio e b f, plano basi æquidistante: & eadem portio secetur alio plano per axem; ut superficiei sectio sit parabole a b c: planorū portiones abscindentium rectæ lineæ a c, e f: axis autem portionis, & sectionis diameter b d; quam linea e f in puncto g secet. Dico portionem conoidis a b c ad portionem e b f duplam proportionem habere eius, quæ est basis a c ad basim e f; uel axis d b ad b g axem. Intelligantur enim duo coni, seu coni portiones a b c, e b f, eãdem basim, quam portiones conoidis, & æqualem habentes altitudinem. & quoniam a b c portio conoidis sesquialtera est coni, seu portionis coni a b c; & portio e b f coni seu portionis coni e b f est sesquialtera, quod de-





monstrauit Archimedes in propositionibus 23, & 24 libri de conoidibus, & sphæroidibus: erit conoidis portio ad conoidis portionem, ut conus ad conum, uel ut coni portio ad coni portionem. Sed conus, uel coni portio a b c ad conum, uel coni portionem e b f compositam proportionem habet ex proportione basis a c ad basim e f, & ex proportione altitudinis coni, uel coni portionis a b c ad altitudinem ipsius e b f, ut nos demonstrauimus in commentariis in undecimam propositionem eiusdem libri Archimedis: altitudo autem ad altitudinem est, ut axis ad axem. quod quidem in conis rectis perspicuum est, in scalenis ue

ro

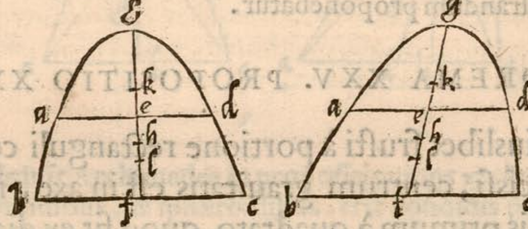
ro ita demonſtrabitur. Ducatur à puncto b ad planum baſis a c perpendicularis linea b h, quæ ipſam e f in K ſecet. erit b h altitudo coni, uel coni portionis a b c: & b K altitudo e f g. 16. undecimi. Quod cum lineæ a c, e f inter ſe æquidiſtent, ſunt enim planorum æquidiſtantium ſectiones: habebit d b ad b g proportionem eandem, quam h b ad b K. 4 ſexti. quare portio conoidis a b c ad portionem e f g proportionem habet compoſitam ex proportione baſis a c ad baſim e f; & ex proportione d b axis ad axem b g. Sed circulus, uel 2. duodecimi ellipſis circa diametrum a c ad circulum, uel ellipſim 7. de conoidibus & ſphæroidibus circa e f, eſt ut quadratum a c ad quadratum e f; hoc eſt ut quadratũ a d ad quadratũ e g. & quadratum a d ad quadratum e g eſt, ut linea d b ad lineam b g. 15. quinti circulus igitur, uel ellipſis circa diametrum a c ad circulũ, uel ellipſim circa e f, 20. primi conicorũ hoc eſt baſis ad baſim eandem proportionem habet, quã d b axis ad axem b g. ex quibus ſequitur portionem a b c ad portionem e b f habere proportionem duplam eius, quæ eſt baſis a c ad baſim e f: uel axis d b ad b g axem. quod demonſtrandum proponebatur.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXI.

Cuiuslibet fruſti à portione rectanguli conoidis abſciſſi, centrum grauitatis eſt in axe, ita ut demptis primum à quadrato, quod fit ex diametro maioris baſis, tertia ipſius parte, & duabus tertiis quadrati, quod fit ex diametro baſis minoris: deinde à tertia parte quadrati maioris baſis rurſus dempta portione, ad quam reliquum quadrati baſis maioris unà cum dicta portione duplã proportionem habeat eius, quæ eſt quadrati maioris basis ad quadratum minoris: centrum sit in eo axis puncto, quo ita diuiditur ut pars, quæ minorem basim attingit ad alteram partem eandem proportionem habeat, quam dempto quadrato minoris basis à duabus tertiis quadrati maioris, habet id, quod reliquum est unà cum portione à tertia quadrati maioris parte dempta, ad reliquã eiusdem tertiæ portionem.

16. undecimi. 4 sexti. 2. duodecimi 7. de conoidibus & sphæroidibus 15. quinti 20. primi conicorũ

SIT frustum à portione rectanguli conoidis abscissum a b c d, cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum b c, minor circa diametrum a d; & axis e f. describatur autem portio conoidis, à quo illud abscissum est, & pla-



no per axem ducto secetur; ut superficiei sectio sit parabole b g c, cuius diameter, & axis portionis g f: deinde g f diuidatur in puncto h, ita ut g h sit dupla h f: & rursus g e in eandem proportionem diuidatur: sitq; g k ipsius k e dupla. Iã ex iis, quæ proxime demonstrauimus, constat centrum grauitatis portionis b g c esse h punctum: & portionis a g c punctum k. sumpto igitur infra h puncto l, ita ut k h ad h l

eam

tam proportionem habeat, quam a b c d frustum ad portionem a g d; erit punctum l eius frusti grauitatis cẽtrum: habebitq; componendo K l ad l h proportionem eandem, quam portio conoidis b g c ad a g d portionem. Itaq; quoniam quadratum b f ad quadratum a e, hoc est quadratum b c ad quadratum a d est, ut linea f g ad g e: erunt duæ tertiæ quadrati b c ad duas tertias quadrati a d, ut h g ad g k: & si à duabus tertiis quadrati b c demptæ fuerint duæ tertiæ quadrati a d: erit diuidẽdo id, quod relinquitur ad duas tertias quadrati a d, ut h k ad k g. Rursus duæ tertiæ quadrati a d ad duas tertias quadrati b c sunt, ut k g ad g h: & duæ tertiæ quadrati b c ad tertiã partẽ ipsius, ut g h ad h f. ergo ex æquali id, quod relinquitur ex duabus tertiis quadrati b c, demptis ab ipsis quadrati a d duabus tertiis, ad tertiã partem quadrati b c, ut k h ad h f: & ad portionem eiusdẽ tertiæ partis, ad quam unà cum ipsa portione, duplam proportionem habeat eius, quæ est quadrati b c ad quadratũ a d, ut K l ad l h. habet enim K l ad l h eandem proportionem, quam conoidis portio b g c ad portionem a g d: portio autem b g c ad portionem a g d duplam proportionem habet eius, quæ est basis b c ad basim a d: hoc est quadrati b c ad quadratum a d; ut proxime demonstratum est. quare dempto a d quadrato à duabus tertiis quadrati b c, erit id, quod relinquitur unà cum dicta portione tertiæ partis ad reliquam eiusdem portionem, ut e l ad l f. Cum igitur centrum grauitatis frusti a b c d sit l, à quo axis e f in eam, quã diximus, proportionem diuidatur; constat uerũ esse illud, quod demonstrandum proposuimus.

20. 1. conicorum.

30 huius

FINIS LIBRI DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

Impress. Bononiæ cum licentia Superiorum.